К другой категории относятся поля, разлагающиеся в интеграл Фурье, содержащий непрерывный ряд различных частот. Для этого функции $f(t)$ должны удовлетворять определенным условиям; обычно речь идет о функциях, обращающихся в нуль при $t=\pm\infty$. Такое разложение имеет вид

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{49,5}$$

причем компоненты Фурье определяются по самой функции $f(t)$ интегралами

$$f_\omega=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt. \tag{49,6}$$

При этом аналогично (49,3)

$$f_{-\omega}=f_\omega^*. \tag{49,7}$$

Выразим полную интенсивность волны, т. е. интеграл от f^2 по всему времени, через интенсивности компонент Фурье. С помощью (49,5—6) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}\right\}dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f_\omega\int_{-\infty}^{\infty} fe^{-i\omega t}\,dt\right\}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega}\frac{d\omega}{2\pi},$$

или, учитывая (49,7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}=2\int_{0}^{\infty}|f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{49,8}$$

§ 50. Частично поляризованный свет

Всякая монохроматическая волна по самому своему определению непременно поляризована. Обычно, однако, приходится иметь дело с волнами лишь почти монохроматическими, содержащими частоты в некотором малом интервале $\Delta\omega$. Рассмотрим такую волну, и пусть ω есть некоторая средняя ее частота. Тогда ее поле (будем говорить, для определенности, об электрическом поле $\mathbf{E}$) в заданной точке пространства можно написать в виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0(t)\,e^{-i\omega t},$$

где комплексная амплитуда $\mathbf{E}_0(t)$ является некоторой медленно меняющейся функцией времени (у строго монохроматической

волны было бы $\mathbf{E}_0 = \text{const}$). Поскольку $\mathbf{E}_0$ определяет поляризацию волны, то это значит, что в каждой точке волны ее поляризация меняется со временем; такую волну называют *частично поляризованной.*

Свойства поляризации электромагнитных волн, в частности света, наблюдаются экспериментально посредством пропускания исследуемого света через различные тела (например, призмы Николя) и измерения интенсивности прошедшего через тело света. С математической точки зрения это означает, что о свойствах поляризации света делаются заключения, исходя из значений некоторых квадратичных функций его поля. При этом, разумеется, идет речь о средних по времени значениях этих функций.

Квадратичная функция поля состоит из членов, пропорциональных произведениям $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha^* E_\beta^*$ или $E_\alpha E_\beta^*$. Произведения вида

$$E_\alpha E_\beta = E_{0\alpha} E_{0\beta} e^{-2i\omega t}, \quad E_\alpha^* E_\beta^* = E_{0\alpha}^* E_{0\beta}^* e^{2i\omega t},$$

содержащие быстро осциллирующие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, при усреднении по времени дают нуль. Произведения же $E_\alpha E_\beta^* = E_{0\alpha} E_{0\beta}^*$ такого множителя не содержат, и потому их средние значения отличны от нуля. Таким образом, мы видим, что свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha} E_{0\beta}^*}. \tag{50,1}$$

Поскольку вектор $\mathbf{E}_0$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к направлению волны, то тензор $J_{\alpha\beta}$ имеет всего четыре компоненты (в этом параграфе индексы α, β подразумеваются пробегающими всего два значения: $\alpha, \beta = 1, 2$, отвечающих осям y и z; ось x — вдоль направления распространения волны).

Сумма диагональных компонент тензора $J_{\alpha\beta}$ (обозначим ее через J) есть вещественная величина — среднее значение квадрата модуля вектора $\mathbf{E}_0$ (или, что то же, вектора $\mathbf{E}$):

$$J \equiv J_{\alpha\alpha} = \overline{\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*}. \tag{50,2}$$

Этой величиной определяется интенсивность волны, измеряемая плотностью потока энергии в ней. Для того чтобы исключить эту величину, не имеющую прямого отношения к поляризационным свойствам, введем вместо $J_{\alpha\beta}$ тензор

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \tag{50,3}$$

для которого $\rho_{\alpha\alpha} = 1$; будем называть его *поляризационным тензором.*

Из определения (50,1) видно, что компоненты тензора $J_{\alpha\beta}$, а с ним и $\rho_{\alpha\beta}$, связаны соотношениями

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho^*_{\beta\alpha} \tag{50,4}$$

(т. е. тензор, как говорят, эрмитов). В силу этих соотношений диагональные компоненты ρ_{11} и ρ_{22} вещественны (причем $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$), а $\rho_{21} = \rho^*_{12}$. Всего, следовательно, поляризационный тензор характеризуется тремя вещественными параметрами.

Выясним условия, которые должен удовлетворять тензор $\rho_{\alpha\beta}$ для вполне поляризованного света. В этом случае $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, и поэтому имеем просто:

$$J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta} = E_{0\alpha}E^*_{0\beta} \tag{50,5}$$

(без усреднения), т. е. компоненты тензора могут быть представлены в виде произведений компонент некоторого постоянного вектора. Необходимое и достаточное условие для этого выражается равенством нулю определителя

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0. \tag{50,6}$$

Противоположным случаем является неполяризованный, или *естественный*, свет. Полное отсутствие поляризации означает, что все направления (в плоскости yz) вполне эквивалентны. Другими словами, поляризационный тензор должен иметь вид

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}. \tag{50,7}$$

При этом определитель $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

В общем случае произвольной поляризации этот определитель имеет значения между 0 и 1/4 [1]). *Степенью поляризации* назовем положительную величину P, определенную согласно

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - P^2). \tag{50,8}$$

Она пробегает значения от 0 для неполяризованного до 1 для поляризованного света.

Произвольный тензор $\rho_{\alpha\beta}$ может быть разложен на две части — симметричную и антисимметричную. Из них первая

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} + \rho_{\beta\alpha})$$

---

[1]) В положительности определителя для любого тензора вида (50,1) легко убедиться, рассматривая для простоты усреднение как суммирование по ряду различных дискретных значений и применяя известное алгебраическое неравенство

$$\left|\sum_{a,b} x_a y_b\right|^2 \leqslant \sum_a |x_a|^2 \sum_b |y_b|^2.$$

в силу эрмитовости $\rho_{\alpha\beta}$ является вещественной. Антисимметричная же часть, напротив, чисто мнима. Как и всякий антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений, она сводится к псевдоскаляру (см. примечание на стр. 35):

$$\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta}-\rho_{\beta\alpha})=-\frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A,$$

где A — вещественный псевдоскаляр, $e_{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор (с компонентами $e_{12}=-e_{21}=1$). Таким образом, поляризационный тензор представится в виде

$$\rho_{\alpha\beta}=S_{\alpha\beta}-\frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A,\quad S_{\alpha\beta}=S_{\beta\alpha},\tag{50,9}$$

т. е. сводится к одному вещественному симметричному тензору и одному псевдоскаляру.

Для поляризованной по кругу волны вектор $\mathbf{E}_0=\text{const}$, причем

$$E_{02}=\pm iE_{01}.$$

Легко видеть, что при этом $S_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$, а $A=\pm 1$. Напротив, для линейно поляризованной волны постоянный вектор $\mathbf{E}_0$ может быть выбран вещественным, так что $A=0$. В общем случае величину A можно назвать степенью круговой поляризации; она пробегает значения от $+1$ до -1, причем эти предельные значения отвечают соответственно право- и лево- циркулярно поляризованным волнам.

Вещественный тензор $S_{\alpha\beta}$, как и всякий симметричный тензор, может быть приведен к главным осям с двумя различными главными значениями, которые обозначим через λ_1 и λ_2. Направления главных осей взаимно перпендикулярны. Обозначая через $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ орты (единичные векторы) этих направлений, можно представить $S_{\alpha\beta}$ в виде

$$S_{\alpha\beta}=\lambda_1 n_\alpha^{(1)}n_\beta^{(1)}+\lambda_2 n_\alpha^{(2)}n_\beta^{(2)},\quad \lambda_1+\lambda_2=1.\tag{50,10}$$

Величины λ_1 и λ_2 положительны и пробегают значения от 0 до 1.

Пусть $A=0$, так что $\rho_{\alpha\beta}=S_{\alpha\beta}$. Каждый из двух членов в (50,10) имеет вид произведения двух компонент постоянного вещественного вектора ($\sqrt{\lambda_1}\mathbf{n}^{(1)}$ или $\sqrt{\lambda_2}\mathbf{n}^{(2)}$). Другими словами, каждый из этих членов соответствует линейно поляризованному свету. Далее, мы видим, что в (50,10) нет члена, содержащего произведения компонент этих двух волн. Это означает, что обе части можно рассматривать как физически независимые друг от друга, или, как говорят, *некогерентные*. Действительно, если две волны независимы друг от друга, то среднее значение произведения $E_\alpha^{(1)}E_\beta^{(2)}$ равно произведению средних значений каждого из множителей, и поскольку каждое из последних равно

нулю, то и

$$\overline{E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к результату, что при $A = 0$ частично поляризованную волну можно представить как наложение двух некогерентных волн (с интенсивностями, пропорциональными λ_1 и λ_2), линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях[1]). (В общем же случае комплексного тензора $\rho_{\alpha\beta}$ можно показать, что свет может быть представлен как наложение двух некогерентных эллиптически поляризованных волн, эллипсы поляризации которых подобны и взаимно перпендикулярны, — см. задачу 2.)

Пусть φ — угол между осью l (ось y) и ортом $\mathbf{n}^{(1)}$; тогда

$$\mathbf{n}^{(1)} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi), \qquad \mathbf{n}^{(2)} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi).$$

Вводя величину $l = \lambda_1 - \lambda_2$ (пусть $\lambda_1 > \lambda_2$), представим компоненты тензора (50,10) в следующем виде:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + l\cos 2\varphi & l\sin 2\varphi \\ l\sin 2\varphi & 1 - l\cos 2\varphi \end{pmatrix}. \tag{50,11}$$

Таким образом, при произвольном выборе осей y, z поляризационные свойства волны можно характеризовать следующими тремя вещественными параметрами: A — степень круговой поляризации, l — степень максимальной линейной поляризации, φ — угол между направлением $\mathbf{n}^{(1)}$ максимальной поляризации и осью y.

Вместо этих параметров может представить определенные преимущества другой набор трех параметров:

$$\xi_1 = l\sin 2\varphi, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = l\cos 2\varphi \tag{50,12}$$

(их называют *параметрами Стокса*). Поляризационный тензор выражается через них согласно

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \tag{50,13}$$

Все три параметра пробегают значения между -1 и $+1$. Параметр ξ_3 характеризует линейную поляризацию вдоль осей y и z: значению $\xi_3 = 1$ отвечает полная линейная поляризация вдоль оси y, а значению $\xi_3 = -1$ — вдоль оси z. Параметр же ξ_1 характеризует линейную поляризацию вдоль направлений, составляющих 45° с осью y: значению $\xi_1 = 1$ отвечает полная поляри-

[1]) Определитель $|S_{\alpha\beta}| = \lambda_1\lambda_2$; пусть $\lambda_1 > \lambda_2$, тогда степень поляризации, определенная согласно (50,8), равна $P = 1 - 2\lambda_2$. В данном случае ($A = 0$) для характеристики степени поляризации света часто пользуются и так называемым *коэффициентом деполяризации*, определенным как отношение λ_2/λ_1.

зация под углом $\varphi = \pi/4$, а значению $\xi_1 = -1$ — под углом $\varphi = -\pi/4$ [1]).

Определитель тензора (50,13) равен

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2). \tag{50,14}$$

Сравнив с (50,8), мы видим, что

$$P = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}. \tag{50,15}$$

Таким образом, при заданной общей степени поляризации P возможны различные типы поляризации, характеризуемые значениями трех величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 с заданной суммой их квадратов; эти величины образуют как бы вектор заданной длины.

Отметим, что величины $\xi_2 = A$ и $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = l$ инвариантны относительно преобразований Лоренца. Это обстоятельство в значительной степени очевидно уже из самого смысла этих величин как степеней круговой и линейной поляризаций [2]).

Задачи

1. Разложить произвольный частично поляризованный свет на «естественную» и «поляризованную» части.

Решение. Такое разложение означает представление тензора $J_{\alpha\beta}$ в виде

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} J^{(e)}\delta_{\alpha\beta} + E_{0\alpha}^{(п)} E_{0\beta}^{(п)*}.$$

Первый член отвечает естественной, а второй — поляризованной частям света. Для определения интенсивностей этих частей замечаем, что определитель

$$\left| J_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} J^{(e)}\delta_{\alpha\beta} \right| = \left| E_{0\alpha}^{(п)} E_{0\beta}^{(п)*} \right| = 0.$$

Представив $J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta}$ в виде (50,13) и решая это уравнение, получим:

$$J^{(e)} = J(1 - P).$$

Интенсивность же поляризованной части $J^{(п)} = \left| \mathbf{E}_0^{(п)} \right|^2 = J - J^{(e)} = JP$.

---

[1]) Для полностью эллиптически поляризованной волны с осями эллипса $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ (см. § 48) параметры Стокса равны

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm 2b_1 b_2/J, \quad \xi_3 = (b_1^2 - b_2^2)/J.$$

При этом ось y направлена вдоль $\mathbf{b}_1$, а два знака в ξ_2 отвечают направлениям $\mathbf{b}_2$ в положительном или отрицательном направлении оси z.

[2]) Для прямого доказательства замечаем, что поскольку поле волны поперечно в любой системе отсчета, то заранее очевидно, что тензор $\rho_{\alpha\beta}$ останется двухмерным и в новой системе отсчета. При этом преобразование $\rho_{\alpha\beta}$ в $\rho'_{\alpha\beta}$ оставляет неизменной сумму квадратов модулей $\rho_{\alpha\beta}\overset{*}{\rho}_{\alpha\beta}$ (действительно, вид преобразования не зависит от конкретных поляризационных свойств света, а для вполне поляризованной волны эта сумма равна 1 в любой системе отсчета). В силу вещественности этого преобразования вещественная и мнимая части тензора $\rho_{\alpha\beta}$ (50,9) преобразуются независимо, а потому остаются неизменными также и суммы квадратов компонент каждой из них в отдельности, выражающиеся соответственно через l и A.

Поляризованная часть света представляет собой, вообще говоря, эллиптически поляризованную волну, причем направления осей эллипса совпадают с главными осями тензора $S_{\alpha\beta}$. Величины b_1 и b_2 осей эллипса и угол φ, образуемый осью $\mathbf{b}_1$ с осью y, определяются из равенств:

$$b_1^2 + b_2^2 = JP, \quad 2b_1b_2 = JP\xi_2, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\xi_1}{\xi_3}.$$

2. Представить произвольную частично поляризованную волну в виде наложения двух некогерентных эллиптически поляризованных волн.

Решение. Для эрмитового тензора $\rho_{\alpha\beta}$ «главные оси» определяются двумя единичными комплексными ортами $\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{n}^* = 1)$, удовлетворяющими уравнениям

$$\rho_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n_\alpha. \tag{1}$$

Главные значения λ_1 и λ_2 даются корнями уравнения

$$|\rho_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0.$$

Умножив уравнение (1) с обеих сторон на $\overset{*}{n}_\alpha$, имеем:

$$\lambda = \rho_{\alpha\beta}\overset{*}{n}_\alpha n_\beta = \frac{1}{J}\overline{|E_{0\alpha}\overset{*}{n}_\alpha|^2},$$

откуда видно, что λ_1, λ_2 вещественны и положительны. Умножив уравнения

$$\rho_{\alpha\beta}n_\beta^{(1)} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)}, \quad \overset{*}{\rho}_{\alpha\beta}n_\beta^{(2)*} = \lambda_2 n_\alpha^{(2)*}$$

первое на $n_\alpha^{(2)*}$, а второе на $n_\alpha^{(1)}$, вычтя почленно одно из другого и воспользовавшись эрмитовостью тензора $\rho_{\alpha\beta}$, получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, n_\alpha^{(1)}n_\alpha^{(2)*} = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$, т. е. орты $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ ортогональны друг другу.

Искомое разложение волны осуществляется формулой

$$\rho_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)}n_\beta^{(1)*} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)}n_\beta^{(2)*}.$$

Всегда можно выбрать комплексную амплитуду так, чтобы из двух взаимно перпендикулярных компонент одна была вещественна, а другая мнима (ср. § 48). Положив

$$n_1^{(1)} = b_1, \quad n_2^{(1)} = ib_2$$

(где теперь b_1 и b_2 подразумеваются нормированными условием $b_1^2 + b_2^2 = 1$), получим тогда из уравнения $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$:

$$n_1^{(2)} = ib_2, \quad n_2^{(2)} = b_1.$$

Отсюда видно, что эллипсы обоих эллиптически поляризованных колебаний подобны (имеют одинаковые отношения осей), причем один из них повернут на прямой угол относительно другого.

3. Найти закон преобразования параметров Стокса при повороте осей y, z на угол φ.

Решение. Искомый закон определяется связью параметров Стокса с компонентами двухмерного тензора в плоскости yz и дается формулами

$$\xi_1' = \xi_1\cos 2\varphi - \xi_3\sin 2\varphi, \quad \xi_3' = \xi_1\sin 2\varphi + \xi_3\cos 2\varphi, \quad \xi_2' = \xi_2.$$