§ 51. Разложение электростатического поля

Поле, созданное зарядами, тоже можно формально разложить по плоским волнам (в интеграл Фурье). Это разложение, однако, существенно отличается от разложения электромагнитных волн в пустоте. Действительно, поле зарядов не удовлетворяет однородному волновому уравнению, а потому и каждый член разложения поля не удовлетворяет этому уравнению. Отсюда следует, что для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется соотношение $k^2 = \omega^2/c^2$, которое имеет место для плоских монохроматических электромагнитных волн.

В частности, если формально представить электростатическое поле в виде наложения плоских волн, то «частота» этих волн будет равна нулю, так как рассматриваемое поле не зависит от времени; волновые же векторы, конечно, отличны от нуля.

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом e, находящимся в начале координат. Потенциал φ этого поля определяется уравнением (см. § 36)

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}). \tag{51,1}$$

Разложим φ в пространственный интеграл Фурье, т. е. представим его в виде

$$\varphi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{kr}}\varphi_{\mathbf{k}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad d^3k = dk_x\,dk_y\,dk_z. \tag{51,2}$$

При этом

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \int \varphi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{kr}}\,dV.$$

Применив к обеим частям равенства (51,2) оператор Лапласа, находим:

$$\Delta\varphi = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{kr}}\varphi_{\mathbf{k}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

так что компонента Фурье от выражения $\Delta\varphi$ есть

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, можно найти $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (51,1):

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\int 4\pi e\delta(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{kr}}\,dV = -4\pi e.$$

Сравнивая оба полученных выражения, находим:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}. \tag{51,3}$$

Эта формула и решает поставленную задачу.

Аналогично потенциалу φ можно разложить и напряженность:

$$\mathbf{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{51,4}$$

С помощью (51,2) имеем:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\int i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Сравнивая с (51,4), находим:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2}. \tag{51,5}$$

Отсюда видно, что поле волн, на которое мы разложили кулоново поле, направлено по волновому вектору. Поэтому эти волны можно назвать продольными.

§ 52. Собственные колебания поля

Рассмотрим свободное (без зарядов) электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объеме пространства. Для упрощения дальнейших вычислений мы предполагаем, что этот объем обладает формой прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно A, B, C. Мы можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье (по трем координатам). Напишем это разложение (например, для векторного потенциала) в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}. \tag{52,1}$$

Суммирование производится здесь по всем возможным значениям вектора $\mathbf{k}$, компоненты которого пробегают, как известно, значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{52,2}$$

где n_x, n_y, n_z — положительные или отрицательные целые числа.

В силу вещественности $\mathbf{A}$ коэффициенты разложения (52,1) связаны друг с другом равенствами $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$. Из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ следует, что для каждого $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0, \tag{52,3}$$

т. е. комплексные векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ «поперечны» к соответствующим волновым векторам $\mathbf{k}$. Векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ являются, конечно, функция-