Аналогично потенциалу φ можно разложить и напряженность:

$$\mathbf{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{51,4}$$

С помощью (51,2) имеем:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\int i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Сравнивая с (51,4), находим:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2}. \tag{51,5}$$

Отсюда видно, что поле волн, на которое мы разложили кулоново поле, направлено по волновому вектору. Поэтому эти волны можно назвать продольными.

§ 52. Собственные колебания поля

Рассмотрим свободное (без зарядов) электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объеме пространства. Для упрощения дальнейших вычислений мы предполагаем, что этот объем обладает формой прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно A, B, C. Мы можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье (по трем координатам). Напишем это разложение (например, для векторного потенциала) в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}. \tag{52,1}$$

Суммирование производится здесь по всем возможным значениям вектора $\mathbf{k}$, компоненты которого пробегают, как известно, значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{52,2}$$

где n_x, n_y, n_z — положительные или отрицательные целые числа.

В силу вещественности $\mathbf{A}$ коэффициенты разложения (52,1) связаны друг с другом равенствами $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$. Из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ следует, что для каждого $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0, \tag{52,3}$$

т. е. комплексные векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ «поперечны» к соответствующим волновым векторам $\mathbf{k}$. Векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ являются, конечно, функция-

ми времени; в силу волнового уравнения (46,7) каждый из них удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + c^2k^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{52,4}$$

Если размеры A, B, C выбранного объема достаточно велики, то соседние значения k_x, k_y, k_z очень близки друг к другу. Можно говорить тогда о числе возможных значений k_x, k_y, k_z в небольших интервалах Δk_x, Δk_y, Δk_z. Поскольку соседние значения, скажем k_x, соответствуют значениям n_x, отличающимся на единицу, то число Δn_x возможных значений k_x в интервале Δk_x равно просто соответствующему интервалу значений n_x. Таким образом, находим:

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\Delta k_z.$$

Полное число Δn значений вектора $\mathbf{k}$ с компонентами в заданных интервалах равно произведению

$$\Delta n = \Delta n_x\,\Delta n_y\,\Delta n_z = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta k_x\,\Delta k_y\,\Delta k_z, \tag{52,5}$$

где $V = ABC$ — объем поля. Легко определить отсюда число значений волнового вектора с абсолютной величиной в интервале Δk и направлением в элементе телесных углов Δo. Для этого надо перейти к сферическим координатам в «$\mathbf{k}$-пространстве» и написать вместо $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ элемент объема в этих координатах. Таким образом,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}k^2\,\Delta k\,\Delta o. \tag{52,6}$$

Заменив здесь Δo на 4π, получим число значений $\mathbf{k}$ с величиной в интервале Δk и любыми направлениями: $\Delta n = Vk^2\Delta k/2\pi^2$.

Вычислим полную энергию поля

$$\mathscr{E} = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\,dV,$$

выразив ее через величины $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$. Для электрического и магнитного полей имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot}\mathbf{A} = i\sum_{\mathbf{k}}[\mathbf{kA}_{\mathbf{k}}]\,e^{i\mathbf{kr}}. \end{aligned} \tag{52,7}$$

При вычислении квадратов этих сумм замечаем, что все произведения членов с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, такими, что

$\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}$, дают нуль при интегрировании по всему объему. Действительно, такие члены содержат множители $e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, а интеграл, например,

$$\int_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx$$

с целым отличным от нуля n_x равен нулю. В членах же с $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ экспоненциальные множители выпадают и интегрирование по dV дает просто объем V.

В результате найдем:

$$\mathscr{E} = \frac{V}{8\pi}\sum_{\mathbf{k}}\left\{\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + [\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}][\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*]\right\}.$$

Но ввиду (52,3) имеем:

$$[\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}][\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*] = k^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*,$$

так что

$$\mathscr{E} = \frac{V}{8\pi c^2}\sum_{\mathbf{k}}\{\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + k^2c^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*\}. \tag{52,8}$$

Каждый член этой суммы соответствует одному из членов разложения (52,1).

В силу уравнения (52,4) векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ являются гармоническими функциями времени с частотами $\omega_k = ck$, зависящими только от абсолютной величины волнового вектора. В зависимости от выбора этих функций члены разложения (52,1) могут представлять собой стоячие или бегущие плоские волны. Представим разложение поля в таком виде, чтобы его члены изображали бегущие волны. Для этого запишем его в форме

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \tag{52,9}$$

явным образом выражающей вещественность $\mathbf{A}$, причем каждый из векторов $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ зависит от времени по закону

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \propto e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{52,10}$$

Тогда каждый отдельный член в сумме (52,9) будет функцией только от разности $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t$, что соответствует волне, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$.

Сравнив разложения (52,9) и (52,1), находим, что их коэффициенты связаны равенствами

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*,$$

а в силу (52,10) производные по времени

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = -ick(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*).$$

Подставив это в (52,8), выразим энергию поля через коэффициенты разложения (52,9). Члены с произведениями вида $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}$ или $\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}}$ взаимно сокращаются; заметив также, что суммы $\sum \mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}$ и $\sum \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}}$ отличаются лишь обозначением переменной суммирования и потому совпадают друг с другом, получим окончательно:

$$\mathscr{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathscr{E}_{\mathbf{k}}, \quad \mathscr{E}_{\mathbf{k}} = \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}. \tag{52,11}$$

Таким образом, полная энергия поля выражается в виде суммы энергий $\mathscr{E}_{\mathbf{k}}$, связанных с каждой из плоских волн в отдельности.

Аналогичным образом можно вычислить полный импульс поля:

$$\frac{1}{c^2}\int \mathbf{S}\, dV = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{E}\mathbf{H}]\, dV,$$

причем получается

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k}\frac{\mathscr{E}_{\mathbf{k}}}{c}. \tag{52,12}$$

Этот результат можно было ожидать заранее ввиду известного соотношения между энергией и импульсом плоских волн (см. § 47).

Разложением (52,9) достигается описание поля посредством дискретного ряда переменных (векторы $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$) вместо описания непрерывным рядом переменных, каковым по существу является описание потенциалом $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, задаваемым во всех точках пространства. Мы произведем теперь преобразование переменных $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, в результате которого окажется возможным придать уравнениям поля вид, аналогичный каноническим уравнениям (уравнениям Гамильтона) механики.

Введем вещественные «канонические переменные» $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}), \\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}} &= -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{52,13}$$

Функция Гамильтона поля получается подстановкой этих выражений в энергию (52,11):

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathscr{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}\,(\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} + \omega^2_k \mathbf{Q}^2_{\mathbf{k}}). \tag{52,14}$$

При этом уравнения Гамильтона $\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$ совпадают с равенствами $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$, которые, таким образом, действительно оказываются следствием уравнений движения (это достигнуто

надлежащим выбором коэффициента в преобразовании (52,13)[1]. Уравнения же $\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{Q}_k = -\dot{\mathbf{P}}_k$ приводят к уравнениям

$$\ddot{\mathbf{Q}}_k + \omega_k^2\mathbf{Q}_k = 0, \tag{52,15}$$

т. е. тождественны с уравнениями поля.

Каждый из векторов $\mathbf{Q}_k$ и $\mathbf{P}_k$ перпендикулярен к волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет по две независимые компоненты. Направление этих векторов определяет направление поляризации соответствующей бегущей волны. Обозначив две компоненты вектора $\mathbf{Q}_k$ (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) посредством $\mathbf{Q}_{kj}$, $j = 1, 2$, имеем $\mathbf{Q}_k^2 = \sum_j Q_{kj}^2$, и аналогично для $\mathbf{P}_k$. Тогда

$$\mathscr{H} = \sum_{kj} \mathscr{H}_{kj}, \quad \mathscr{H}_{kj} = \frac{1}{2}(P_{kj}^2 + \omega_k^2 Q_{kj}^2). \tag{52,16}$$

Мы видим, что функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов, каждый из которых содержит только по одной паре величин Q_{kj}, P_{kj}. Каждый такой член соответствует бегущей волне с определенными волновым вектором и поляризацией. При этом $\mathscr{H}_{kj}$ имеет вид функции Гамильтона одномерного «осциллятора», совершающего простые гармонические колебания. Поэтому о полученном разложении говорят иногда как о разложении поля на осцилляторы.

Выпишем формулы, выражающие в явном виде поле через переменные $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{Q}_k$. Из (52,13) имеем:

$$\mathbf{a}_k = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_k - i\omega_k\mathbf{Q}_k), \quad \mathbf{a}_k^* = -\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_k + i\omega_k\mathbf{Q}_k). \tag{52,17}$$

Подставляя эти выражения в (52,1), найдем векторный потенциал поля:

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{V}}\sum_k \frac{1}{k}(ck\mathbf{Q}_k\cos\mathbf{kr} - \mathbf{P}_k\sin\mathbf{kr}). \tag{52,18}$$

Для электрического и магнитного полей получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\sum_k (ck\,\mathbf{Q}_k\sin\mathbf{kr} + \mathbf{P}_k\cos\mathbf{kr}), \\ \mathbf{H} &= -\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\sum_k \frac{1}{k}(ck\,[\mathbf{kQ}_k]\sin\mathbf{kr} + [\mathbf{kP}_k]\cos\mathbf{kr}). \end{aligned} \tag{52,19}$$