ГЛАВА VII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

§ 53. Геометрическая оптика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и амплитуда везде одинаковы. Произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают.

Однако часто электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, тем не менее таковы, что их можно рассматривать как плоские в каждом небольшом участке пространства. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести так называемые *волновые поверхности*, во всех точках которых фаза волны в данный момент времени одинакова (для плоской волны это — плоскости, перпендикулярные к направлению ее распространения). В каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности. При этом можно ввести понятие *лучей* — линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет *геометрической оптики*. Геометрическая оптика рассматривает, следовательно, распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы. Другими словами, геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \to 0$.

Займемся теперь выводом основного уравнения геометрической оптики — уравнения, определяющего направление лучей. Пусть f есть любая величина, описывающая поле волны (любая из компонент **E** или **H**). В плоской монохроматической волне f имеет вид

$$f = ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\alpha)} = a\exp[i(-k_i x^i + \alpha)] \tag{53,1}$$

(мы опускаем знак Re; везде подразумевается вещественная часть).

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}. \tag{53,2}$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда a является, вообще говоря, функцией координат и времени, а фаза ψ, называемая также *эйконалом*, не имеет простого вида, как в (53,1). Существенно, однако, что эйконал ψ является большой величиной. Это видно уже из того, что он меняется на 2π на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу $\lambda \to 0$.

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

(начало координат и начало отсчета времени выбраны в рассматриваемом участке пространства и интервале времени; значения производных берутся в начале координат). Сравнивая это выражение с (53,1), мы можем написать:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad}\psi, \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{53,3}$$

в соответствии с тем, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую. В четырехмерном виде соотношения (53,3) напишутся как

$$k_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x^i}, \tag{53,4}$$

где k_i — волновой 4-вектор.

Мы видели в § 48, что компоненты 4-вектора k^i связаны соотношением $k_i k^i = 0$. Подставляя сюда (53,4), находим уравнение:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = 0. \tag{53,5}$$

Это уравнение, называемое *уравнением эйконала*, является основным уравнением геометрической оптики.

Уравнение эйконала можно вывести также и непосредственным предельным переходом $\lambda \to 0$ в волновом уравнении. Поле f удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x^i} = 0.$$

Подставляя сюда $f = ae^{i\psi}$, находим:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x^i}e^{i\psi} + 2i\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}e^{i\psi} + if\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x^i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}f = 0. \tag{53,6}$$

Но эйконал ψ, как было выше указано, есть большая величина; поэтому можно пренебречь здесь тремя первыми членами по

сравнению с четвертым, и мы приходим снова к уравнению (53,5).

Укажем еще некоторые соотношения, которые, правда, в применении к распространению света в пустоте приводят лишь к заранее очевидным результатам. Существенно, однако, что в своей общей форме эти выводы применимы и к распространению света в материальных средах.

Из формы уравнения эйконала вытекает замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой материальных частиц. Движение материальной частицы определяется уравнением Гамильтона — Якоби (16,11). Это уравнение, как и уравнение эйконала, является уравнением в частных производных первого порядка и второй степени. Как известно, действие S связано с импульсом $\mathbf{p}$ и функцией Гамильтона $\mathscr{H}$ частицы соотношениями

$$\mathbf{p}=\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathscr{H}=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (53,3), мы видим, что волновой вектор волны играет в геометрической оптике роль импульса частицы в механике, а частота — роль функции Гамильтона, т. е. энергии частицы. Абсолютная величина k волнового вектора связана с частотой посредством формулы $k=\omega/c$. Это соотношение аналогично соотношению $p=\mathscr{E}/c$ между импульсом и энергией частицы с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света.

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Ввиду указанной аналогии мы можем непосредственно написать подобные уравнения для лучей:

$$\dot{\mathbf{k}}=-\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{53,7}$$

В пустоте $\omega=ck$, так что $\dot{\mathbf{k}}=0$, $\mathbf{v}=c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения), т. е., как и следовало, в пустоте лучи являются прямыми линиями, вдоль которых свет распространяется со скоростью c.

Аналогия между волновым вектором волны и импульсом частицы в особенности ясно проявляется в следующем обстоятельстве. Рассмотрим волну, представляющую собой наложение монохроматических волн с частотами, лежащими в некотором небольшом интервале и занимающую некоторую конечную область пространства (так называемый *волновой пакет*). Вычислим 4-импульс поля этой волны, воспользовавшись формулой

(32,6) с тензором энергии-импульса (48,15) (для каждой монохроматической компоненты). Заменяя в этой формуле k^i некоторым его средним значением, получим выражение вида

$$P^i = Ak^i, \tag{53,8}$$

где коэффициент пропорциональности A между двумя 4-векторами P^i и k^i есть некоторый скаляр. В трехмерном виде это соотношение дает:

$$\mathbf{P} = A\mathbf{k}, \quad \mathscr{E} = A\omega. \tag{53,9}$$

Таким образом, мы видим, что импульс и энергия волнового пакета преобразуются от одной системы отсчета к другой соответственно как волновой вектор и частота.

Продолжая аналогию, можно установить для геометрической оптики принцип, аналогичный принципу наименьшего действия в механике. Однако его при этом нельзя будет написать в гамильтоновой форме, $\delta \int L\,dt = 0$, так как оказывается невозможным ввести для лучей функцию, аналогичную функции Лагранжа для частиц. Действительно, функция Лагранжа L частицы связана с функцией Гамильтона $\mathscr{H}$ посредством $L = \mathbf{p}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}} - \mathscr{H}$. Заменяя функцию Гамильтона частотой ω, а импульс — волновым вектором $\mathbf{k}$, мы должны были бы написать для функции Лагранжа в оптике $\mathbf{k}\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} - \omega$. Но это выражение равно нулю, поскольку $\omega = ck$. Невозможность введения функции Лагранжа для лучей видна, впрочем, и непосредственно из указанного выше обстоятельства, что распространение лучей аналогично движению частиц с массой, равной нулю.

Если волна обладает определенной постоянной частотой ω, то зависимость ее поля от времени определяется множителем вида $e^{-i\omega t}$. Поэтому для эйконала такой волны мы можем написать:

$$\psi = -\omega t + \psi_0(x, y, z), \tag{53,10}$$

где ψ_0 — функция только от координат. Уравнение эйконала (53,5) принимает теперь вид

$$(\operatorname{grad}\psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{53,11}$$

Волновые поверхности являются поверхностями постоянного эйконала, т. е. семейством поверхностей вида $\psi_0(x, y, z) = \text{const}$. Лучи же в каждой точке нормальны к соответствующей волновой поверхности; их направление определяется градиентом $\nabla\psi_0$.

Как известно, в случае, когда энергия постоянна, принцип наименьшего действия для частицы можно написать также и

в виде так называемого принципа Мопертюи:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p}\, d\mathbf{l} = 0,$$

где интегрирование производится по траектории частицы между двумя заданными ее положениями. Импульс предполагается при этом выраженным как функция от энергии и координат частицы. Аналогичный принцип для лучей называется *принципом Ферма*. В этом случае мы можем написать по аналогии:

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k}\, d\mathbf{l} = 0. \qquad (53,12)$$

В пустоте $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, и мы получаем ($\mathbf{n}\, d\mathbf{l} = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \qquad (53,13)$$

что и соответствует прямолинейному распространению лучей.

§ 54. Интенсивность

Таким образом, в геометрической оптике световую волну можно рассматривать как пучок лучей. Лучи, однако, сами по себе определяют лишь направление распространения света в каждой точке; остается вопрос о распределении интенсивности света в пространстве.

Выделим на какой-либо из волновых поверхностей рассматриваемого пучка бесконечно малый элемент. Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность имеет в каждой своей точке два, вообще говоря, различных главных радиуса кривизны. Пусть ac и bd (рис. 7) — элементы главных кругов кривизны, проведенные на данном элементе волновой поверхности. Тогда лучи, проходящие через точки a и c, пересекутся друг с другом в соответствующем центре кривизны O_1, а лучи, проходящие через b и d, пересекутся в другом центре кривизны O_2.

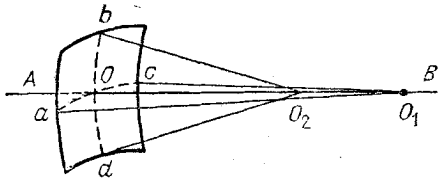

Рис. 7

При данных углах раствора лучей, исходящих из O_1 и O_2, длины отрезков ac и bd пропорциональны соответствующим радиусам кривизны R_1 и R_2 (т. е. длинам O_1O и O_2O); площадь элемента поверхности пропорциональна произведению длин ac и bd, т. е. пропорциональна R_1R_2. Другими словами, если рассматривать элемент волновой поверхности, ограниченный определенным рядом лучей, то при движении вдоль них площадь этого элемента будет меняться пропорционально R_1R_2.