в виде так называемого принципа Мопертюи:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p}\, d\mathbf{l} = 0,$$

где интегрирование производится по траектории частицы между двумя заданными ее положениями. Импульс предполагается при этом выраженным как функция от энергии и координат частицы. Аналогичный принцип для лучей называется *принципом Ферма*. В этом случае мы можем написать по аналогии:

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k}\, d\mathbf{l} = 0. \qquad (53,12)$$

В пустоте $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, и мы получаем ($\mathbf{n}\, d\mathbf{l} = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \qquad (53,13)$$

что и соответствует прямолинейному распространению лучей.

§ 54. Интенсивность

Таким образом, в геометрической оптике световую волну можно рассматривать как пучок лучей. Лучи, однако, сами по себе определяют лишь направление распространения света в каждой точке; остается вопрос о распределении интенсивности света в пространстве.

Выделим на какой-либо из волновых поверхностей рассматриваемого пучка бесконечно малый элемент. Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность имеет в каждой своей точке два, вообще говоря, различных главных радиуса кривизны. Пусть ac и bd (рис. 7) — элементы главных кругов кривизны, проведенные на данном элементе волновой поверхности. Тогда лучи, проходящие через точки a и c, пересекутся друг с другом в соответствующем центре кривизны O_1, а лучи, проходящие через b и d, пересекутся в другом центре кривизны O_2.

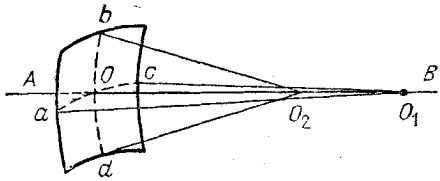

Рис. 7

При данных углах раствора лучей, исходящих из O_1 и O_2, длины отрезков ac и bd пропорциональны соответствующим радиусам кривизны R_1 и R_2 (т. е. длинам O_1O и O_2O); площадь элемента поверхности пропорциональна произведению длин ac и bd, т. е. пропорциональна R_1R_2. Другими словами, если рассматривать элемент волновой поверхности, ограниченный определенным рядом лучей, то при движении вдоль них площадь этого элемента будет меняться пропорционально R_1R_2.

С другой стороны, интенсивность, т. е. плотность потока энергии, обратно пропорциональна площади поверхности, через которую проходит данное количество световой энергии. Таким образом, мы приходим к выводу, что интенсивность

$$I = \frac{\text{const}}{R_1 R_2}. \tag{54,1}$$

Эту формулу надо понимать следующим образом. На каждом данном луче (AB на рис. 7) существуют определенные точки O_1 и O_2, являющиеся центрами кривизны всех волновых поверхностей, пересекающих данный луч. Расстояния OO_1 и OO_2 от точки O пересечения волновой поверхности с лучом до точек O_1 и O_2 являются радиусами кривизны R_1 и R_2 волновой поверхности в точке O. Таким образом, формула (54,1) определяет интенсивность света в точке O на данном луче как функцию от расстояний до определенных точек на этом луче. Подчеркнем, что эта формула непригодна для сравнения интенсивностей в разных точках одной и той же волновой поверхности.

Поскольку интенсивность определяется квадратом модуля поля, то для изменения самого поля вдоль луча мы можем написать:

$$f = \frac{\text{const}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}, \tag{54,2}$$

где в фазовом множителе e^{ikR} под R может поразумеваться как R_1, так и R_2; величины e^{ikR_1} и e^{ikR_2} отличаются друг от друга только постоянным (для данного луча) множителем, поскольку разность $R_1 - R_2$, расстояние между обоими центрами кривизны, постоянна.

Если оба радиуса кривизны волновой поверхности совпадают, то (54,1) и (54,2) имеют вид

$$I = \frac{\text{const}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const}}{R} e^{ikR}. \tag{54,3}$$

Это имеет место, в частности, всегда в тех случаях, когда свет испускается точечным источником (волновые поверхности являются тогда концентрическими сферами, а R — расстоянием до источника света).

Из (54,1) мы видим, что интенсивность обращается в бесконечность в точках $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, т. е. в центрах кривизны волновых поверхностей. Применяя это ко всем лучам в пучке, находим, что интенсивность света в данном пучке обращается в бесконечность, вообще говоря, на двух поверхностях — геометрическом месте всех центров кривизны волновых поверхностей. Эти поверхности носят название *каустик*. В частном случае пучка лучей со сферическими волновыми поверхностями обе каустики сливаются в одну точку (*фокус*).

Отметим, что, согласно известным из дифференциальной геометрии свойствам геометрического места центров кривизны семейства поверхностей, лучи касаются каустик.

Надо иметь в виду, что (при выпуклых волновых поверхностях) центры кривизны волновых поверхностей могут оказаться лежащими не на самих лучах, а на их продолжениях за оптическую систему, от которой они исходят. В таких случаях говорят о *мнимых каустиках* (или мнимых фокусах). Интенсивность света при этом нигде не обращается в бесконечность.

Что касается обращения интенсивности в бесконечность, то в действительности, разумеется, интенсивность в точках каустики делается большой, но остается конечной (см. задачу к § 59). Формальное обращение в бесконечность означает, что приближение геометрической оптики становится во всяком случае неприменимым вблизи каустик. С этим же обстоятельством связано и то, что изменение фазы вдоль луча может определяться формулой (54,2) только на участках луча, не включающих в себя точек его касания с каустиками. Ниже (в § 59) будет показано, что в действительности при прохождении мимо каустики фаза поля уменьшается на $\pi/2$. Это значит, что если на участке луча до его касания первой каустики поле пропорционально множителю e^{ikx} (x — координата вдоль луча), то после прохождения мимо каустики поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi/2)}$. То же самое произойдет вблизи точки касания второй каустики, и за этой точкой поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi)}$ [1]).

§ 55. Угловой эйконал

Идущий в пустоте луч света, попадая в какое-либо прозрачное материальное тело, имеет по выходе из этого тела направление, вообще говоря, отличное от первоначального. Это изменение направления зависит, конечно, от конкретных свойств тела и от его формы. Оказывается, однако, возможным вывести некоторые общие законы, относящиеся к изменению направления лучей света при прохождении через произвольные материальные тела. При этом предполагается только, что для лучей, распространяющихся внутри рассматриваемого тела, имеет место геометрическая оптика. Такие прозрачные тела, через которые пропускают лучи света, мы будем называть, как это принято, *оптическими системами*.

В силу указанной в § 53 аналогии между распространением лучей и движением частицы, те же общие законы справедливы и для изменения направления движения частиц, двигавшихся

---

[1]) Хотя формула (54,2) сама по себе не справедлива вблизи каустик, но указанное изменение фазы поля формально соответствует изменению знака (т. е. умножению на $e^{i\pi}$) R_1 или R_2 в этой формуле.