Отметим, что, согласно известным из дифференциальной геометрии свойствам геометрического места центров кривизны семейства поверхностей, лучи касаются каустик.

Надо иметь в виду, что (при выпуклых волновых поверхностях) центры кривизны волновых поверхностей могут оказаться лежащими не на самих лучах, а на их продолжениях за оптическую систему, от которой они исходят. В таких случаях говорят о *мнимых каустиках* (или мнимых фокусах). Интенсивность света при этом нигде не обращается в бесконечность.

Что касается обращения интенсивности в бесконечность, то в действительности, разумеется, интенсивность в точках каустики делается большой, но остается конечной (см. задачу к § 59). Формальное обращение в бесконечность означает, что приближение геометрической оптики становится во всяком случае неприменимым вблизи каустик. С этим же обстоятельством связано и то, что изменение фазы вдоль луча может определяться формулой (54,2) только на участках луча, не включающих в себя точек его касания с каустиками. Ниже (в § 59) будет показано, что в действительности при прохождении мимо каустики фаза поля уменьшается на $\pi/2$. Это значит, что если на участке луча до его касания первой каустики поле пропорционально множителю e^{ikx} (x — координата вдоль луча), то после прохождения мимо каустики поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi/2)}$. То же самое произойдет вблизи точки касания второй каустики, и за этой точкой поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi)}$ [1]).

§ 55. Угловой эйконал

Идущий в пустоте луч света, попадая в какое-либо прозрачное материальное тело, имеет по выходе из этого тела направление, вообще говоря, отличное от первоначального. Это изменение направления зависит, конечно, от конкретных свойств тела и от его формы. Оказывается, однако, возможным вывести некоторые общие законы, относящиеся к изменению направления лучей света при прохождении через произвольные материальные тела. При этом предполагается только, что для лучей, распространяющихся внутри рассматриваемого тела, имеет место геометрическая оптика. Такие прозрачные тела, через которые пропускают лучи света, мы будем называть, как это принято, *оптическими системами*.

В силу указанной в § 53 аналогии между распространением лучей и движением частицы, те же общие законы справедливы и для изменения направления движения частиц, двигавшихся

---

[1]) Хотя формула (54,2) сама по себе не справедлива вблизи каустик, но указанное изменение фазы поля формально соответствует изменению знака (т. е. умножению на $e^{i\pi}$) R_1 или R_2 в этой формуле.

сначала прямолинейно в пустоте, затем проходящих через какое-нибудь электромагнитное поле и снова выходящих из этого поля в пустоту. Для определенности мы будем, однако, ниже говорить о распространении лучей света.

Мы видели, что уравнение эйконала, определяющее распространение лучей, может быть написано (для света с определенной частотой) в виде (53,11). Ниже мы будем для удобства обозначать посредством ψ эйконал ψ_0, деленный на постоянную величину ω/c. Тогда основное уравнение геометрической оптики будет иметь вид

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \tag{55,1}$$

Каждое решение этого уравнения описывает собой определенный пучок лучей, причем направление луча, проходящего через данную точку пространства, определяется градиентом ψ в этой точке. Для наших целей, однако, такое описание недостаточно, поскольку мы ищем общие соотношения, определяющие прохождение через оптические системы не какого-либо одного определенного пучка лучей, а соотношения, относящиеся к любым лучам. Поэтому мы должны пользоваться эйконалом, взятым в таком виде, в котором он описывал бы все вообще возможные лучи света, т. е. лучи, проходящие через любую пару точек в пространстве. В обычной своей форме эйконал $\psi(\mathbf{r})$ есть фаза луча из некоторого пучка, проходящего через точку $\mathbf{r}$. Теперь же мы должны ввести эйконал как функцию $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ координат двух точек ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — радиус-векторы начальной и конечной точек луча). Через всякую пару точек $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ можно провести луч, и $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз (или, как говорят, *оптическая длина пути*) этого луча между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Ниже мы будем везде подразумевать под $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиус-векторы точек на луче соответственно до и после его прохождения через оптическую систему.

Если в $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ один из радиус-векторов, скажем $\mathbf{r}'$, считать заданным, то ψ как функция от $\mathbf{r}$ будет описывать определенный пучок лучей, а именно пучок лучей, проходящих через точку $\mathbf{r}'$. Тогда ψ должно удовлетворять уравнению (55,1), в котором дифференцирование производится по компонентам $\mathbf{r}$. Аналогично, считая $\mathbf{r}$ заданным, находим еще одно уравнение для $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, так что

$$(\nabla\psi)^2 = 1, \qquad (\nabla'\psi)^2 = 1. \tag{55,2}$$

Направление луча определяется градиентом его фазы. Поскольку $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз в точках $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, то направление луча в точке $\mathbf{r}'$ определяется вектором $\mathbf{n}' = \partial\psi/\partial\mathbf{r}'$, а в точке $\mathbf{r}$ — вектором $\mathbf{n} = -\partial\psi/\partial\mathbf{r}$. Из (55,2) видно, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ единичные:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \tag{55,3}$$

Четыре вектора $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ связаны между собой некоторым соотношением, поскольку два из них ($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$) являются производными по двум другим ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$) от некоторой функции ψ. Что касается самой функции ψ, то она удовлетворяет дополнительным условиям — уравнениям (55,2).

Для нахождения соотношения между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ удобно ввести вместо ψ другую величину, на которую бы не налагалось никаких дополнительных условий (т. е. которая не должна была бы удовлетворять каким-либо дифференциальным уравнениям). Это можно сделать следующим образом. В функции ψ независимыми переменными являются $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, так что для дифференциала $d\psi$ имеем:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}\,d\mathbf{r}' = -\mathbf{n}\,d\mathbf{r} + \mathbf{n}'\,d\mathbf{r}'.$$

Произведем теперь преобразование Лежандра к независимым переменным $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ вместо $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т. е. напишем:

$$d\psi = -d(\mathbf{nr}) + \mathbf{r}\,d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}'\mathbf{r}') - \mathbf{r}'\,d\mathbf{n}',$$

откуда, вводя функцию

$$\chi = \mathbf{n}'\mathbf{r}' - \mathbf{nr} - \psi, \tag{55,4}$$

имеем:

$$d\chi = -\mathbf{r}\,d\mathbf{n} + \mathbf{r}'\,d\mathbf{n}'. \tag{55,5}$$

Функцию χ называют *угловым эйконалом*; как видно из (55,5), независимыми переменными в нем являются $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. На χ не налагается уже никаких дополнительных условий. Действительно, уравнения (55,3) представляют собой теперь лишь условия, относящиеся к независимым переменным, показывающие, что из трех компонент n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ (и аналогично для $\mathbf{n}'$) только две являются независимыми. Мы будем ниже в качестве независимых переменных пользоваться компонентами n_y, n_z, n'_y, n'_z, и тогда

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \quad n'_x = \sqrt{1 - n_y'^2 - n_z'^2}.$$

Подставляя эти выражения в

$$d\chi = -x\,dn_x - y\,dn_y - z\,dn_z + x'\,dn'_x + y'\,dn'_y + z'\,dn'_z,$$

находим для дифференциала $d\chi$:

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x}x\right)dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x}x\right)dn_z + \\ + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x}x'\right)dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x}x'\right)dn'_z.$$

Отсюда находим окончательно следующие уравнения:

$$y - \frac{n_y}{n_x} x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \qquad z - \frac{n_z}{n_x} x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_z},$$
$$y' - \frac{n'_y}{n'_x} x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}, \qquad z' - \frac{n'_z}{n'_x} x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_z}, \tag{55,6}$$

определяющие искомое общее соотношение между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$. Функция χ характеризует конкретные свойства тел, через которые проходят лучи (или свойства поля — в случае движения заряженных частиц).

При заданных значениях $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ каждая из двух пар уравнений (55,6) изображает собой прямую линию. Эти прямые являются не чем иным, как лучами до и после прохождения через оптическую систему. Таким образом, уравнения (55,6) непосредственно определяют ход лучей по обе стороны оптической системы.

§ 56. Тонкие пучки лучей

При рассмотрении прохождения пучков лучей через оптические системы особый интерес представляют пучки, все лучи которых пересекаются в одной точке (так называемые *гомоцентрические* пучки).

Гомоцентрический пучок лучей после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестает быть гомоцентрическим, т. е. после прохождения через тела лучи не собираются вновь в какой-нибудь одной точке. Только в особых случаях лучи, исходящие из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему вновь пересекаются все в одной точке — изображении светящейся точки [1]).

Можно показать (см. § 57), что единственный случай, когда все гомоцентрические пучки остаются после прохождения через оптическую систему строго гомоцентрическими, есть тождественное отображение, т. е. случай, когда изображение отличается от предмета только его переносом, поворотом или зеркальным отражением как целого.

Таким образом, никакая оптическая система не может дать вполне резкое изображение предмета (обладающего конечными размерами), за исключением только тривиального случая тождественного изображения [2]). Возможно лишь приближенное, не

---

[1]) Точка пересечения может лежать либо на самих лучах, либо на линии их продолжения; в зависимости от этого изображения называются соответственно действительными или мнимыми.

[2]) Такое отображение может быть осуществлено с помощью плоских зеркал.