Отсюда находим окончательно следующие уравнения:

$$y - \frac{n_y}{n_x} x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \qquad z - \frac{n_z}{n_x} x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_z},$$
$$y' - \frac{n'_y}{n'_x} x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}, \qquad z' - \frac{n'_z}{n'_x} x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_z}, \tag{55,6}$$

определяющие искомое общее соотношение между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$. Функция χ характеризует конкретные свойства тел, через которые проходят лучи (или свойства поля — в случае движения заряженных частиц).

При заданных значениях $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ каждая из двух пар уравнений (55,6) изображает собой прямую линию. Эти прямые являются не чем иным, как лучами до и после прохождения через оптическую систему. Таким образом, уравнения (55,6) непосредственно определяют ход лучей по обе стороны оптической системы.

§ 56. Тонкие пучки лучей

При рассмотрении прохождения пучков лучей через оптические системы особый интерес представляют пучки, все лучи которых пересекаются в одной точке (так называемые *гомоцентрические* пучки).

Гомоцентрический пучок лучей после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестает быть гомоцентрическим, т. е. после прохождения через тела лучи не собираются вновь в какой-нибудь одной точке. Только в особых случаях лучи, исходящие из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему вновь пересекаются все в одной точке — изображении светящейся точки [1]).

Можно показать (см. § 57), что единственный случай, когда все гомоцентрические пучки остаются после прохождения через оптическую систему строго гомоцентрическими, есть тождественное отображение, т. е. случай, когда изображение отличается от предмета только его переносом, поворотом или зеркальным отражением как целого.

Таким образом, никакая оптическая система не может дать вполне резкое изображение предмета (обладающего конечными размерами), за исключением только тривиального случая тождественного изображения [2]). Возможно лишь приближенное, не

---

[1]) Точка пересечения может лежать либо на самих лучах, либо на линии их продолжения; в зависимости от этого изображения называются соответственно действительными или мнимыми.

[2]) Такое отображение может быть осуществлено с помощью плоских зеркал.

вполне резкое осуществление нетождественного изображения протяженных предметов.

Наиболее важным случаем приближенного перехода гомоцентрических пучков в гомоцентрические же являются достаточно тонкие пучки (т. е. пучки с малым углом раствора), идущие вблизи определенной (для данной оптической системы) линии. Эта линия называется *оптической осью* системы.

Необходимо при этом отметить, что даже бесконечно узкие пучки лучей (в трехмерном пространстве) в общем случае не являются гомоцентрическими; мы видели (рис. 7), что и в таком пучке различные лучи пересекаются в различных точках (это явление называется *астигматизмом*). Исключение представляют те точки волновой поверхности, в которых оба ее главных радиуса кривизны равны друг другу, — вблизи такой точки малый участок поверхности можно рассматривать как сферический, и соответствующий тонкий пучок лучей является гомоцентрическим.

Будем рассматривать оптические системы, обладающие аксиальной симметрией [1]). Ось симметрии такой системы является в то же время ее оптической осью. Действительно, волновая поверхность пучка лучей, идущего вдоль этой оси, тоже имеет аксиальную симметрию; поверхности же вращения имеют в точках своего пересечения с осью симметрии два равных друг другу радиуса кривизны. Поэтому тонкий пучок, идущий в этом направлении, остается гомоцентрическим.

Для нахождения общих количественных соотношений, определяющих отображения с помощью тонких пучков, проходящих через аксиально-симметричные оптические системы, воспользуемся уравнениями (55,6), определив предварительно вид функции χ в рассматриваемом случае.

Поскольку пучки лучей тонкие и идут вблизи оптической оси, то векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ для каждого пучка направлены почти вдоль этой оси. Если выбрать оптическую ось в качестве оси x, то компоненты n_y, n_z, n'_y, n'_z будут малы по сравнению с единицей. Что касается компонент n_x, n'_x, то $n_x \approx 1$, а n'_x может быть приближенно равным $+1$ или -1. В первом случае лучи продолжают идти почти в прежнем направлении, попадая в пространство по другую сторону оптической системы, которую в этом случае называют *линзой*. Во втором случае лучи изменяют направление на почти противоположное; такая оптическая система называется *зеркалом*.

---

[1]) Можно показать, что задача об отображении с помощью тонких пучков, идущих вблизи оптической оси в не аксиально-симметричной оптической системе, может быть сведена к отображению аксиально-симметричной системой вместе с последующим поворотом получающегося при этом изображения как целого относительно изображаемого предмета.

Воспользовавшись малостью n_y, n_z, n'_y, n'_z, разложим угловой эйконал $\chi(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ в ряд и ограничимся первыми членами. В силу аксиальной симметрии всей системы, χ должно быть инвариантно по отношению к поворотам системы координат вокруг оптической оси. Отсюда видно, что членов первого порядка, пропорциональных первым степеням y- и z- компонент векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, в разложении χ не может быть, — эти члены не обладали бы требуемой инвариантностью. Из членов второго порядка требуемым свойством обладают квадраты $\mathbf{n}^2$, $\mathbf{n}'^2$ и скалярное произведение $\mathbf{n}\mathbf{n}'$. Таким образом, с точностью до членов второго порядка угловой эйконал для аксиально-симметричной оптической системы имеет вид

$$\chi = \text{const} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2}(n'^2_y + n'^2_z), \qquad (56,1)$$

где f, g, h — постоянные.

Мы будем рассматривать сейчас для определенности случай линзы, в связи с чем положим $n'_x \approx 1$; для зеркал, как будет ниже указано, все формулы имеют аналогичный вид. Подставляя теперь выражение (56,1) в общие уравнения (55,6), находим:

$$\begin{aligned} n_y(x-g) - fn'_y &= y, \qquad fn_y + n'_y(x'+h) = y', \\ n_z(x-g) - fn'_z &= z, \qquad fn_z + n'_z(x'+h) = z'. \end{aligned} \qquad (56,2)$$

Рассмотрим гомоцентрический пучок, исходящий из точки x, y, z; точка x', y', z' пусть будет той, в которой пересекаются все лучи пучка после прохождения через линзу. Если бы первая и вторая пары уравнений (56,2) были независимы, то эти четыре уравнения при заданных x, y, z, x', y', z' определили бы одну определенную систему значений n_y, n_z, n'_y, n'_z, т. е. всего только один из лучей, выходящих из точки x, y, z, прошел бы через точку x', y', z'. Для того чтобы все лучи, выходящие из x, y, z, прошли через x', y', z', необходимо, следовательно, чтобы уравнения (56,2) не были независимы, т. е. чтобы одна пара этих уравнений была следствием другой. Необходимым для такой зависимости условием является, очевидно, пропорциональность коэффициентов одной пары уравнений коэффициентам другой пары. Таким образом, должно быть

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}; \qquad (56,3)$$

в частности,

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \qquad (56,4)$$

Полученные уравнения определяют искомую зависимость координат точки изображения от координат предмета при отображении с помощью тонких пучков.

Точки $x = g$, $x' = -h$ на оптической оси называются *главными фокусами* оптической системы. Рассмотрим пучки лучей, параллельных оптической оси. Точка испускания такого луча находится, очевидно, в бесконечности на оптической оси, т. е. $x = \infty$. Из (56,3) видно, что в этом случае $x' = -h$. Таким образом, параллельный пучок лучей после прохождения через оптическую систему пересекается в главном фокусе. Наоборот, пучок лучей, исходящий из главного фокуса, становится после прохождения через систему параллельным.

В уравнениях (56,3) координаты x и x' отсчитываются от одного и того же начала координат, лежащего на оптической оси. Удобнее, однако, отсчитывать координаты предмета и изображения от разных начал координат, выбрав их соответственно в главных фокусах. В качестве положительного направления отсчета координат выберем направления от соответствующего фокуса в сторону, направленную по ходу луча. Обозначая новые координаты предмета и изображения большими буквами, имеем:

$$X = x - g, \quad X' = x' + h, \quad Y = y, \quad Y' = y', \quad Z = z, \quad Z' = z'.$$

Уравнения отображения (56,3) и (56,4) принимают в новых обозначениях вид

$$XX' = -f^2, \tag{56,5}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}. \tag{56,6}$$

Величину f называют *главным фокусным расстоянием* системы.

Отношение Y'/Y называется *боковым увеличением*. Что касается продольного увеличения, то, поскольку координаты не просто пропорциональны друг другу, его следует писать в дифференциальном виде, сравнивая элемент длины предмета (в направлении оси) с элементом длины изображения. Из (56,5) пишем для *продольного увеличения*:

$$\left|\frac{dX'}{dX}\right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y}\right)^2. \tag{56,7}$$

Мы видим отсюда, что даже для бесконечно малых предметов нельзя получить геометрически подобного изображения. Продольное увеличение никогда не равно поперечному (за исключением тривиального случая тождественного отображения).

Пучок, вышедший из точки $X = f$ на оптической оси, пересекается вновь в точке $X' = -f$ на той же оси; эти две точки называются *главными*. Из уравнений (56,2) $(n_y X - f n'_y = Y$ $n_z X - f n'_z = Z)$ видно, что в этом случае $(X = f,\ Y = Z = 0)$ имеют место равенства $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$. Таким образом, всякий луч, выходящий из главной точки, пересекает вновь оптическую

ось в другой главной точке в направлении, параллельном первоначальному.

Если координаты предмета и его изображения отсчитывать от главных точек (а не от главных фокусов), то для этих координат ξ и ξ' имеем:

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

Подставляя это в (56,5), легко получаем уравнение отображения в виде

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \tag{56,8}$$

Можно показать, что у оптических систем с малой толщиной (например, у зеркала, узкой линзы) обе главные точки почти совпадают. В этом случае в особенности удобно уравнение (56,8), так как в нем ξ и ξ' отсчитываются тогда практически от одной и той же точки.

Если фокусное расстояние положительно, то предметы, находящиеся спереди (по ходу луча) от фокуса ($X > 0$), отображаются прямо ($Y'/Y > 0$); такие оптические системы называются *собирательными*. Если же $f < 0$, то при $X > 0$ имеем $Y'/Y < 0$, т. е. предмет отображается обратным образом; такие системы называются *рассеивающими*.

Существует один предельный случай отображения, который не содержится в формулах (56,8), — это случай, когда все три коэффициента f, g, h делаются бесконечными (т. е. оптическая система имеет бесконечное фокусное расстояние и ее главные фокусы находятся в бесконечности). Переходя в уравнении (56,4) к пределу бесконечных f, g, h, находим:

$$x' = \frac{h}{g} x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

Поскольку представляет интерес только тот случай, когда предмет и его изображение находятся на конечных расстояниях от оптической системы, то f, g, h должны стремиться к бесконечности так, чтобы отношения h/g, $(f^2 - gh)/g$ были конечными. Обозначая их соответственно посредством α^2 и β, имеем: $x' = \alpha^2 x + \beta$.

Для двух других координат мы имеем теперь из уравнения (56,7):

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \pm \alpha.$$

Наконец, отсчитывая снова координаты x и x' от разных начал координат, соответственно от произвольной точки на отражаемой оси и от изображения этой точки, получаем окончательно уравнения отображения в простом виде:

$$X' = \alpha^2 X, \quad Y' = \pm \alpha Y, \quad Z' = \pm \alpha Z. \tag{56,9}$$

Таким образом, продольные и поперечные увеличения постоянны (но не равны друг другу). Рассмотренный случай отображения называется *телескопическим*.

Все выведенные нами для линз формулы (56,5—9) в равной мере применимы и к зеркалам, и даже к оптическим системам без аксиальной симметрии, если только отображение осуществляется тонкими пучками лучей, идущими вблизи оптической оси. При этом всегда отсчет x-координат предмета и изображения должен производиться вдоль оптической оси от соответствующих точек (главных фокусов или главных точек) по направлению распространения луча. Надо иметь в виду при этом, что у оптических систем, не обладающих аксиальной симметрией, направления оптической оси впереди и позади системы не лежат на одной прямой.

Задачи

1. Определить фокусное расстояние для отображения с помощью двух аксиально-симметричных оптических систем с совпадающими оптическими осями.

Решение. Пусть f_1 и f_2 — фокусные расстояния обеих систем. Для каждой системы в отдельности имеем:

$$X_1X_1' = -f_1^2, \quad X_2X_2' = -f_2^2.$$

Поскольку изображения, даваемые первой системой, являются предметом для второй, то, обозначая посредством l расстояние между задним главным фокусом первой системы и передним фокусом второй, имеем $X_2 = X_1' - l$; выражая X_2' через X_1, находим:

$$X_2' = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + lX_1},$$

или

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right)\left(X_2' - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

откуда видно, что главные фокусы составной системы находятся в точках $X_1 = -f_1^2/l$, $X_2' = f_2^2/l$, а фокусное расстояние равно

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(для выбора знака в этом выражении надо написать соответствующее уравнение для поперечного увеличения).

В случае, если $l = 0$, фокусное расстояние $f = \infty$, т. е. составная система дает телескопическое отображение. В этом случае имеем: $X_2' = X_1(f_2/f_1)^2$, т. е. параметр α в общей формуле (56,9) равен $\alpha = f_2/f_1$.

2. Определить фокусное расстояние «магнитной линзы» для заряженных частиц, представляющей собой продольное однородное магнитное поле в участке длины l (рис. 8) [1]).

---

[1]) Речь может идти о поле в длинном соленоиде при пренебрежении искажением однородности поля вблизи концов соленоида.

Решение. При движении в магнитном поле кинетическая энергия частицы сохраняется; поэтому уравнение Гамильтона — Якоби для укороченного действия $S_0(\mathbf{r})$ (полное действие $S = -\mathscr{E}t + S_0$) есть

$$\left(\nabla S_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = p^2,$$

где

$$p^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - m^2c^2 = \text{const}.$$

Воспользовавшись формулой (19,4) для векторного потенциала однородного магнитного поля, выбирая ось x вдоль направления последнего и рассматри-

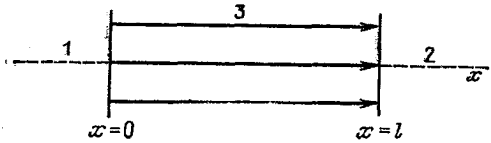

Рис. 8

вая ее как оптическую ось аксиально-симметричной оптической системы, получим уравнение Гамильтона — Якоби в виде

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{e^2}{4c^2}H^2r^2 = p^2, \tag{1}$$

где r — расстояние от оси x, а S_0 — функция от x и r.

Для тонких пучков частиц, распространяющихся вблизи оптической оси, координата r мала, соответственно чему ищем S_0 в виде ряда по степеням r. Первые два члена этого ряда:

$$S_0 = px + \frac{1}{2}\sigma(x)r^2, \tag{2}$$

где $\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению

$$p\sigma'(x) + \sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2}H^2 = 0. \tag{3}$$

В области *1* перед линзой имеем:

$$\sigma^{(1)} = \frac{p}{x - x_1},$$

где $x_1 < 0$ — постоянная. Это решение соответствует свободному пучку частиц, разлетающихся по прямым лучам из точки $x = x_1$ на оптической оси в области *1*. Действительно, свободному движению частицы с импульсом p в направлении от точки $x = x_1$ соответствует действие

$$S_0 = p\sqrt{r^2 + (x - x_1)^2} \approx p(x - x_1) + \frac{pr^2}{2(x - x_1)}.$$

Аналогично, в области *2* позади линзы пишем:

$$\sigma^{(2)} = \frac{p}{x - x_2},$$

где постоянная x_2 представляет собой координату изображения точки x_1.

В области же 3 внутри линзы решение уравнения (3):

$$\sigma^{(3)} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp} x + C\right),$$

где C — произвольная постоянная.

Постоянные C и x_2 (при заданном x_1) определяются условиями непрерывности $\sigma(x)$ при $x = 0$ и $x = l$:

$$-\frac{p}{x_1} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg} C, \quad \frac{p}{l - x_2} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp} l + C\right).$$

Исключая из этих равенств постоянную C, получим:

$$(x_1 - g)(x_2 + h) = -f^2,$$

где [1])

$$g = -\frac{2cp}{eH} \operatorname{ctg} \frac{eHl}{2cp}, \quad h = g + l, \quad f = \frac{2cp}{eH \sin \frac{eHl}{2cp}}.$$

§ 57. Отображение широкими пучками лучей

Рассмотренное в предыдущем параграфе отображение предметов с помощью тонких пучков лучей является приближенным; оно тем точнее (т. е. резче), чем у́же эти пучки. Перейдем теперь к вопросу об отображении предметов пучками лучей произвольной ширины.

В противоположность отображению предметов тонкими пучками, которое можно осуществить с любой оптической системой, обладающей аксиальной симметрией, отображение широкими пучками возможно только с помощью определенным образом построенных оптических систем. Даже с этим ограничением возможно, как уже указывалось в § 56, отображение далеко не всех точек пространства.

Дальнейшие выводы основаны на следующем существенном замечании. Пусть все лучи, выходящие из некоторой точки O и проходящие через оптическую систему, вновь пересекаются в некоторой другой точке O'. Легко видеть, что оптическая длина пути ψ одинакова для всех этих лучей. Действительно, вблизи каждой из точек O, O' волновые поверхности для пересекающихся в них лучей являются сферами с центрами соответственно в O и O' и в пределе, при приближении к O и O', вырождаются в эти точки. Но волновые поверхности являются поверхностями постоянной фазы, и поэтому изменения фазы вдоль разных лучей между точками их пересечения двух определенных волновых поверхностей одинаковы. Из сказанного следует, что одинаковы (для разных лучей) и полные изменения фазы между точками O и O'.

---

[1]) Значение f дано с правильным знаком, определение которого, однако, требует дополнительного исследования.