В области же 3 внутри линзы решение уравнения (3):

$$\sigma^{(3)} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp} x + C\right),$$

где C — произвольная постоянная.

Постоянные C и x_2 (при заданном x_1) определяются условиями непрерывности $\sigma(x)$ при $x = 0$ и $x = l$:

$$-\frac{p}{x_1} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg} C, \quad \frac{p}{l - x_2} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp} l + C\right).$$

Исключая из этих равенств постоянную C, получим:

$$(x_1 - g)(x_2 + h) = -f^2,$$

где [1])

$$g = -\frac{2cp}{eH} \operatorname{ctg} \frac{eHl}{2cp}, \quad h = g + l, \quad f = \frac{2cp}{eH \sin \frac{eHl}{2cp}}.$$

§ 57. Отображение широкими пучками лучей

Рассмотренное в предыдущем параграфе отображение предметов с помощью тонких пучков лучей является приближенным; оно тем точнее (т. е. резче), чем у́же эти пучки. Перейдем теперь к вопросу об отображении предметов пучками лучей произвольной ширины.

В противоположность отображению предметов тонкими пучками, которое можно осуществить с любой оптической системой, обладающей аксиальной симметрией, отображение широкими пучками возможно только с помощью определенным образом построенных оптических систем. Даже с этим ограничением возможно, как уже указывалось в § 56, отображение далеко не всех точек пространства.

Дальнейшие выводы основаны на следующем существенном замечании. Пусть все лучи, выходящие из некоторой точки O и проходящие через оптическую систему, вновь пересекаются в некоторой другой точке O'. Легко видеть, что оптическая длина пути ψ одинакова для всех этих лучей. Действительно, вблизи каждой из точек O, O' волновые поверхности для пересекающихся в них лучей являются сферами с центрами соответственно в O и O' и в пределе, при приближении к O и O', вырождаются в эти точки. Но волновые поверхности являются поверхностями постоянной фазы, и поэтому изменения фазы вдоль разных лучей между точками их пересечения двух определенных волновых поверхностей одинаковы. Из сказанного следует, что одинаковы (для разных лучей) и полные изменения фазы между точками O и O'.

---

[1]) Значение f дано с правильным знаком, определение которого, однако, требует дополнительного исследования.

Выясним условия, необходимые для осуществления отображения широкими пучками малого отрезка прямой; изображение представляет собой при этом тоже малый отрезок прямой. Выберем направления этих отрезков за направления осей (назовем их ξ и ξ') с началами O и O' в каких-либо соответствующих друг другу точках предмета и изображения. Пусть ψ есть оптическая длина пути для лучей, выходящих из O и приходящих в O'. Для лучей, выходящих из бесконечно близкой к O точки с координатой $d\xi$ и сходящихся в точке изображения с координатой $d\xi'$, оптическая длина пути есть $\psi + d\psi$, где

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\xi'} d\xi'.$$

Введем «увеличение» при отображении

$$\alpha_\xi = \frac{d\xi'}{d\xi}$$

как отношение длины $d\xi'$ элемента изображения к длине отображаемого элемента $d\xi$. В силу малости отображаемого отрезка увеличение α можно считать величиной, постоянной вдоль его длины. Написав так же, как обычно, $\partial\psi/\partial\xi = -n_\xi$, $\partial\psi/\partial\xi' = n'_\xi$ (n_ξ, n'_ξ — косинусы углов между направлениями луча и соответственно осями ξ и ξ'), получим:

$$d\psi = (\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi)\, d\xi.$$

Как и для всякой пары соответствующих друг другу точек предмета и изображения, оптическая длина пути $\psi + d\psi$ должна быть одинаковой для всех лучей, выходящих из точки с координатой $d\xi$ и приходящих в точку $d\xi'$. Отсюда получаем условие:

$$\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi = \text{const}. \tag{57,1}$$

Это и есть искомое условие, которому должен удовлетворять ход лучей в оптической системе при отображении широкими пучками малого отрезка прямой. Соотношение (57,1) должно выполняться для всех лучей, выходящих из точки O.

Применим теперь полученное условие к отображению с помощью аксиально-симметричной оптической системы.

Начнем с отображения отрезка прямой, лежащего на оптической оси системы (ось x); из соображений симметрии очевидно, что изображение будет тоже лежать на оси. Луч, идущий вдоль оптической оси ($n_x = 1$), в силу аксиальной симметрии системы не меняет своего направления при прохождении через нее, т. е. $n'_x = 1$. Отсюда следует, что const в (57,1) равна в рассматриваемом случае $\alpha_x - 1$, и мы можем переписать (57,1) в виде

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \alpha_x.$$

Обозначая посредством θ и θ' углы, образуемые лучами с оптической осью в точках предмета и изображения, имеем:

$$1-n_x=1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad 1-n'_x=2\sin^2\frac{\theta'}{2}.$$

Таким образом, получим условие отображения в виде

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta'}{2}}=\text{const}=\sqrt{\alpha_x}. \tag{57,2}$$

Далее, рассмотрим отображение малого участка плоскости, перпендикулярной к оптической оси аксиально-симметричной системы; изображение будет, очевидно, тоже перпендикулярно к этой оси. Применяя (57,1) к любому отрезку, лежащему в отображенной плоскости, получим:

$$\alpha_r\sin\theta'-\sin\theta=\text{const},$$

где θ и θ' — по-прежнему углы между лучом и оптической осью. Для лучей, вышедших из точки пересечения изображаемой плоскости с оптической осью в направлении этой оси ($\theta=0$), должно быть, в силу симметрии, и $\theta'=0$. Поэтому $\text{const}=0$, и мы получаем условие отображения в виде

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\text{const}=\alpha_r. \tag{57,3}$$

Что касается отображения широкими пучками трехмерных предметов, то легко видеть, что оно невозможно даже при малом объеме тела, поскольку условия (57,2) и (57,3) несовместимы друг с другом.

§ 58. Пределы геометрической оптики

По определению плоской монохроматической волны ее амплитуда везде и всегда одинакова. Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от $-\infty$ до $+\infty$. Всякая же волна с не везде и не всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической. Мы займемся теперь выяснением вопроса о *степени немонохроматичности* волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся в каждой точке пространства функцией времени. Пусть ω_0 есть некоторая средняя частота волны. Тогда поле волны (например электрическое) в данной точке имеет вид $\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$. Это поле, не являющееся, конечно, само монохроматическим, можно, однако, разложить на монохроматические компоненты,