

Обозначая посредством θ и θ' углы, образуемые лучами с оптической осью в точках предмета и изображения, имеем:

$$1 - n_x = 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 2 \sin^2 \frac{\theta'}{2}.$$

Таким образом, получим условие отображения в виде

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta'}{2}} = \text{const} = \sqrt{a_x}. \quad (57,2)$$

Далее, рассмотрим отображение малого участка плоскости, перпендикулярной к оптической оси аксиально-симметричной системы; изображение будет, очевидно, тоже перпендикулярно к этой оси. Применяя (57,1) к любому отрезку, лежащему в отраженной плоскости, получим:

$$a, \sin \theta' - \sin \theta = \text{const},$$

где θ и θ' — по-прежнему углы между лучом и оптической осью. Для лучей, вышедших из точки пересечения изображаемой плоскости с оптической осью в направлении этой оси ($\theta = 0$), должно быть, в силу симметрии, и $\theta' = 0$. Поэтому $\text{const} = 0$, и мы получаем условие отображения в виде

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \text{const} = a_r. \quad (57,3)$$

Что касается отображения широкими пучками трехмерных предметов, то легко видеть, что оно невозможно даже при малом объеме тела, поскольку условия (57,2) и (57,3) несовместимы друг с другом.

§ 58. Пределы геометрической оптики

По определению плоской монохроматической волны ее амплитуда везде и всегда одинакова. Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от $-\infty$ до $+\infty$. Всякая же волна с не везде и не всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической. Мы займемся теперь выяснением вопроса о степени немонохроматичности волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся в каждой точке пространства функцией времени. Пусть ω_0 есть некоторая средняя частота волны. Тогда поле волны (например электрическое) в данной точке имеет вид $E_0(t) e^{-i\omega_0 t}$. Это поле, не являющееся, конечно, само монохроматическим, можно, однако, разложить на монохроматические компоненты,

т. е. в интеграл Фурье. Амплитуда компоненты этого разложения с частотой ω пропорциональна интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt.$$

Множитель $e^{i(\omega - \omega_0)t}$ является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю. Если бы E_0 было вообще постоянным, то интеграл был бы в точности равен нулю при всех $\omega \neq \omega_0$. Если же $E_0(t)$ переменно, но почти не меняется на протяжении промежутков времени порядка $1/|\omega - \omega_0|$, то интеграл почти равен нулю, тем точнее, чем медленнее меняется E_0 . Для того чтобы интеграл был заметно отличен от нуля, необходимо, чтобы $E_0(t)$ заметно менялось на протяжении промежутка времени порядка $1/|\omega - \omega_0|$.

Обозначим посредством Δt порядок величины промежутка времени, в течение которого амплитуда волны в данной точке пространства заметно меняется. Из приведенных соображений следует теперь, что наиболее отличающиеся от ω_0 частоты, входящие в спектральное разложение этой волны с заметными интенсивностями, определяются из условия $1/|\omega - \omega_0| \sim \Delta t$. Если обозначить посредством $\Delta\omega$ интервал частот (вокруг средней частоты ω_0) в спектральном разложении, то, следовательно, имеет место соотношение

$$\Delta\omega \Delta t \sim 1. \quad (58,1)$$

Мы видим, что действительно волна тем более монохроматична (т. е. $\Delta\omega$ тем меньше), чем больше Δt , т. е. чем медленнее меняется в каждой точке пространства ее амплитуда.

Соотношения, аналогичные (58,1), легко вывести и для волнового вектора. Пусть $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — порядки величин расстояний вдоль осей x, y, z , на которых заметно меняется амплитуда волны. В данный момент времени поле волны как функция от координат имеет вид

$$E_0(r) e^{ik_0 r},$$

где k_0 — некоторое среднее значение волнового вектора. Совершенно аналогично выводу (58,1) можно найти интервал Δk значений, имеющихся в разложении рассматриваемой волны в интеграл Фурье:

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \quad \Delta k_y \Delta y \sim 1, \quad \Delta k_z \Delta z \sim 1. \quad (58,2)$$

Рассмотрим, в частности, волну, излучавшуюся в течение некоторого конечного интервала времени. Обозначим посредством Δt порядок величины этого интервала. Амплитуда в данной точке пространства во всяком случае заметно изменяется за время Δt , в течение которого волна успеет целиком пройти

через эту точку. На основании соотношения (58,1) мы можем теперь сказать, что «степень немонохроматичности» такой волны $\Delta\omega$ во всяком случае не может быть меньше, чем $1/\Delta t$ (но может, конечно, быть и большее):

$$\Delta\omega \geq \frac{1}{\Delta t}. \quad (58,3)$$

Аналогично, если Δx , Δy , Δz — порядки величины размеров волны в пространстве, то для интервалов значений компонент волнового вектора, входящих в разложение волны, находим:

$$\Delta k_x \geq \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \geq \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \geq \frac{1}{\Delta z}. \quad (58,4)$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным. Направляя ось x по направлению (среднему) света в пучке, мы получаем:

$$\theta_y \geq \frac{1}{k \Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \quad (58,5)$$

где θ_y — порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости xy , а λ — длина волны.

С другой стороны, формула (58,5) дает ответ на вопрос о предельной резкости оптических изображений. Пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дает изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна. Для ширины Δ этого пятна имеем согласно (58,5)

$$\Delta \sim \frac{1}{k \theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \quad (58,6)$$

где θ — угол раствора пучка. Эту формулу можно применить не только к изображению, но и к предмету. Именно, можно утверждать, что при наблюдении исходящего из светящейся точки пучка света эту точку нельзя отличить от тела размера λ/θ . Соответственно этому формула (58,6) определяет предельную разрешающую силу микроскопа. Минимальное значение Δ , достигающееся при $\theta \sim 1$, есть λ , в полном согласии с тем, что пределы геометрической оптики определяются длиной волны света.

Задача

Найти порядок величины наименьшей ширины светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии l от диафрагмы.

Решение. Обозначив размер отверстия диафрагмы через d , имеем из (58,5) для угла отклонения лучей («угла дифракции») значение $\sim \lambda/d$, откуда ширина пучка порядка $d + \frac{\lambda}{d} l$. Наименьшее значение этой величины $\sim \sqrt{\lambda l}$.