

### § 59. Дифракция

Законы геометрической оптики строго точны лишь в идеальном случае, когда длину волн можно рассматривать как бесконечно малую. Чем хуже выполнено это условие, тем сильнее проявляются отклонения от геометрической оптики. Явления, наблюдающиеся в результате этих отклонений, носят название явлений *дифракции*.

Явления дифракции можно наблюдать, например, если на пути распространения света<sup>1)</sup> находятся препятствия — непрозрачные тела (будем называть их *экранами*) произвольной формы или, например, если свет проходит через отверстия в непрозрачных экранах. Если бы законы геометрической оптики строго выполнялись, то за экранами находились бы области *тени*, резко ограниченные от областей, куда свет попадает. Дифракция же приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью получается довольно сложная картина распределения интенсивности света. Эти явления дифракции тем сильнее выражены, чем меньше размеры экранов и отверстий в них или чем больше длина волны.

Задача теории дифракции заключается в том, чтобы при данном расположении и форме тел (и расположении источников света) определить распределение света, т. е. электромагнитное поле во всем пространстве. Точное разрешение этой задачи возможно только путем решения волнового уравнения с соответствующими граничными условиями на поверхности тел, зависящими еще к тому же и от оптических свойств материала. Такое решение обычно представляет большие математические трудности.

Однако во многих случаях оказывается достаточным приближенный метод решения задачи о распределении света вблизи границы между светом и тенью. Этот метод применим в случаях слабого отклонения от геометрической оптики. Тем самым предполагается, во-первых, что все размеры велики по сравнению с длиной волны (это относится как к размерам экранов или отверстий в них, так и к расстояниям от тел до точек испускания и наблюдения света); во-вторых, рассматриваются лишь небольшие отклонения света от направления лучей, определяемых геометрической оптикой.

Рассмотрим какой-нибудь экран с отверстием, через которое проходит свет от данных источников. Рис. 9 изображает этот экран в разрезе (жирная линия); свет идет слева направо. Будем обозначать посредством *и* любую из компонент поля *E* или *H*. При этом под *и* мы будем подразумевать поле как функцию

<sup>1)</sup> Мы будем говорить для определенности о свете; все ниже следующее относится, конечно, к любым электромагнитным волнам.

только от координат, т. е. без множителя  $e^{-i\omega t}$ , определяющего зависимость от времени. Нашей задачей является определение интенсивности света, т. е. поля  $u$  в любой точке наблюдения  $P$  за экраном. При приближенном решении этой задачи в случаях, когда отклонения от геометрической оптики малы, можно считать, что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана.

Другими словами, значения поля здесь те, которые следуют из геометрической оптики. Во всех же точках, находящихся непосредственно за экраном, поле можно положить равным нулю. При этом, очевидно, свойства самого экрана (материала, из которого он сделан) вообще не играют роли. Очевидно также, что в рассматриваемых случаях для дифракции существенна только форма края отверстия и не существенна форма непрозрачного экрана.

Проведем какую-нибудь поверхность, закрывающую отверстие в экране и ограниченную его краями (разрез такой поверхности на рис. 9 изображен штрихованной линией). Эту поверхность разобьем на участки с площадью  $d\ell$ , малые по сравнению с размерами отверстия, но большие по сравнению с длиной волны света. Мы можем тогда рассматривать каждый из этих участков, до которых дошла световая волна, так, как будто бы он сам является источником световой волны, распространяющейся во все стороны от этого участка. Поле в точке  $P$  мы будем рассматривать как результат наложения полей, исходящих из всех участков  $d\ell$  поверхности, закрывающей отверстие (так называемый *принцип Гюйгенса*).

Поле, создаваемое участком  $d\ell$  в точке  $P$ , пропорционально значению  $u$  поля в самом участке  $d\ell$  (напоминаем, что поле в  $d\ell$  мы предполагаем таким, каким оно было бы при отсутствии экрана). Кроме того, оно пропорционально проекции  $d\ell_n$  площади  $d\ell$  на плоскость, перпендикулярную к направлению  $n$  луча, пришедшего из источника света в  $d\ell$ . Это следует из того, что какой бы формой ни обладал участок  $d\ell$ , через него будут проходить одинаковые лучи, если только его проекция  $d\ell_n$  будет неизменной, а потому и его действие на поле в точке  $P$  будет одинаковым.

Таким образом, поле, создаваемое в точке  $P$  участком  $d\ell$ , пропорционально  $u d\ell_n$ . Далее, надо еще учесть изменение амплитуды и фазы волны при ее распространении от  $d\ell$  к точке  $P$ .

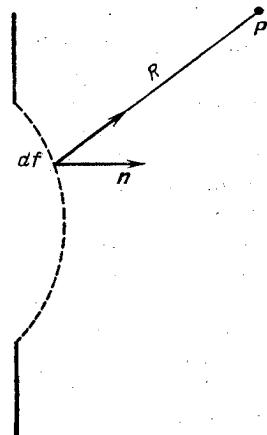


Рис. 9

Закон этого изменения определяется формулой (54,3). Поэтому  $u df_n$  надо умножить еще на  $\frac{1}{R} e^{ikR}$  (где  $R$  — расстояние от  $df$  до  $P$ , а  $k$  — абсолютная величина волнового вектора света), и мы находим, что искомое поле равно

$$au \frac{e^{ikR}}{R} df_n,$$

где  $a$  есть неизвестная пока постоянная. Полное же поле в точке  $P$ , являющееся результатом наложения полей, создаваемых всеми  $df$ , есть

$$u_P = a \int \frac{ue^{ikR}}{R} df_n, \quad (59,1)$$

где интеграл распространен по поверхности, ограниченной краем отверстия. Этот интеграл в рассматриваемом приближении не зависит, конечно, от формы этой поверхности. Формула (59,1) применима, очевидно, и к дифракции не от отверстия на экране, а от экрана, вокруг которого свет может свободно распространяться. В этом случае поверхность интегрирования в (59,1) простирается во все стороны от края экрана.

Для определения постоянной  $a$  рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ ; волновые поверхности параллельны плоскости  $yz$ . Пусть  $u$  есть значение поля в плоскости  $yz$ . Тогда в точке  $P$ , которую мы выберем на оси  $x$ , поле равно  $u_P = ue^{ikx}$ . С другой стороны, поле в точке  $P$  можно определить исходя из формулы (59,1), выбрав в качестве поверхности интегрирования, например, плоскость  $yz$ . При этом виду малости угла дифракции в интеграле существенны только точки плоскости  $yz$ , близкие к началу координат, т. е. точки, в которых  $y, z \ll x$  ( $x$  — координата точки  $P$ ).

Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и (59,1) даст:

$$u_P = au \frac{e^{ikx}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{y^2}{2x}} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{z^2}{2x}} dz,$$

где  $u$  — постоянная (поле в плоскости  $yz$ ); в множителе  $1/R$  можно положить  $R \approx x = \text{const}$ . Стоящие здесь интегралы подстановкой  $y = \xi \sqrt{2x/k}$  приводятся к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i),$$

и мы получаем:  $u_P = aue^{ikx} \frac{2i\pi}{k}$ . С другой стороны,  $u_P = ue^{ikx}$

и, следовательно,  $a = \frac{k}{2\pi i}$ . Подставляя это в (59,1), находим окончательное поставленной задачи в виде

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n. \quad (59,2)$$

При выводе формулы (59,2) источник света предполагался, по существу, точечным, а самый свет — строго монохроматическим. Случай реального протяженного источника, испускающего немонохроматический свет, не нуждается, однако, в особом исследовании. Вследствие полной независимости (некогерентности) света, испускаемого различными точками источника, и некогерентности различных спектральных компонент испускаемого света суммарный результат дифракции сводится просто к сумме распределений интенсивности, получающихся от дифракции каждой из независимых компонент света.

Применим формулу (59,2) для решения вопроса об изменении фазы при прохождении луча через точку его касания с каустикой (см. конец § 54). Выберем в качестве поверхности интегрирования в (59,2) какую-либо волновую поверхность и будем определять поле  $u_P$  в точке  $P$ , лежащей на некотором данном луче на расстоянии  $x$  от точки его пересечения с выбранной волновой поверхностью (эту точку выберем в качестве начала координат  $O$ , а в качестве плоскости  $yz$  — плоскость, касательную к волновой поверхности в точке  $O$ ). При интегрировании в (59,2) существует только небольшой участок волновой поверхности вблизи точки  $O$ . Если плоскости  $xy$  и  $xz$  выбраны совпадающими с главными плоскостями кривизны волновой поверхности в точке  $O$ , то вблизи этой точки уравнение поверхности есть

$$X = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны. Расстояние же  $R$  от точки волновой поверхности с координатами  $X, y, z$  до точки  $P$  с координатами  $x, 0, 0$  есть

$$R = \sqrt{(x - X)^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Вдоль волновой поверхности поле  $u$  можно считать постоянным; то же касается множителя  $1/R$ . Поскольку мы интересуемся только изменением фазы волны, то коэффициент опускаем и пишем просто:

$$\begin{aligned} u_P &\sim \frac{1}{i} \int e^{ikR} df_n \approx \\ &\approx \frac{e^{ikx}}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{y^2}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right)} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right)} dz. \end{aligned} \quad (59,3)$$

Центры кривизны волновой поверхности лежат на рассматриваемом луче в точках  $x = R_1$  и  $x = R_2$ ; это и есть точки касания лучом обеих каустик. Пусть  $R_2 < R_1$ . При  $x < R_2$  коэффициенты при  $i$  в показателях подынтегральных выражений в обоих интегралах положительны, и каждый из этих интегралов содержит множитель  $1 + i$ . Поэтому на участке луча до касания первой каустики имеем  $u_P \sim e^{ikx}$ . При  $R_2 < x < R_1$ , т. е. на отрезке луча между двумя точками касания, интеграл по  $dy$  содержит множитель  $1 + i$ , а интеграл по  $dz$  — множитель  $1 - i$ , так что их произведение вовсе не содержит  $i$ . Таким образом имеем здесь:  $u_P \sim -ie^{ikx} = e^{i(kx-\pi/2)}$ , т. е. при прохождении луча вблизи первой каустики фаза дополнительно меняется на  $-\pi/2$ . Наконец, при  $x > R_1$  имеем  $u_P \sim -e^{ikx} = e^{i(kx-\pi)}$ , т. е. при прохождении вблизи второй каустики фаза еще раз меняется на  $-\pi/2$ .

### Задача

Определить распределение интенсивности света вблизи точки касания луча с каустикой.

**Решение.** Для решения задачи пользуемся формулой (59,2), производя в ней интегрирование по какой-либо волновой поверхности, достаточно удаленной от рассматриваемой точки касания луча с каустикой. На рис. 10  $ab$  есть сечение этой волновой поверхности, а  $a'b'$  — сечение каустики;  $a'b'$

есть эволюта кривой  $ab$ . Мы интересуемся распределением интенсивности вблизи точки  $O$  касания луча  $QO$  с каустикой; длина  $D$  отрезка  $QO$  луча предполагается достаточно большой. Посредством  $x$  обозначим расстояние от точки  $O$  вдоль нормали к каустике, причем будем считать положительными значения  $x$  для точек, лежащих на нормали по направлению к центру кривизны.

Подынтегральное выражение в (59,2) есть функция от расстояния  $R$  от произвольной точки  $Q'$  на волновой поверхности до точки  $P$ . По известному свойству эволюты сумма длины отрезка  $Q'O'$  касательной в точке  $O'$ , и длины дуги  $OO'$  равна длине  $QO$  касательной в точке  $O$ . Для близких друг к другу точек  $O$  и  $O'$  имеем  $OO' = \theta\rho$  ( $\rho$  — радиус кривизны каустики в точке  $O$ ). Поэтому длина  $Q'O' = D - \theta\rho$ . Расстояние же  $Q'O$  (по прямой) равно приближенно (угол  $\theta$  предполагается малым):

Рис. 10

$Q'O \approx Q'O' + \rho \sin \theta = D - \theta\rho + \rho \sin \theta \approx D - \frac{\theta^3}{6}$ .

Наконец, расстояние  $R = Q'P$  равно  $R \approx Q'O - x \sin \theta \approx Q'O - x\theta$ , т. е.

$$R \approx D - x\theta - \frac{1}{6}\rho\theta^3.$$

Подставляя это выражение в (59,2), найдем:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{i\rho\theta^3}{6}} d\theta = 2 \int_0^{\infty} \cos \left( kx\theta + \frac{\rho\theta^3}{6} \right) d\theta$$

(медленно меняющийся множитель  $1/D$  в подынтегральном выражении не существен по сравнению с экспоненциальным множителем, и мы считаем его постоянным). Вводя новую переменную интегрирования  $\xi = (kp/2)^{1/3}t$ , получим:

$$u_p \sim \Phi\left(x \sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

где  $\Phi(t)$  есть так называемая функция Эйри<sup>1)</sup>. Для интенсивности  $I \sim \sim |u_p|^2$  напишем:

$$I = 2A \left(\frac{2k^2}{\rho}\right)^{1/6} \Phi^2\left(x \sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right)$$

(о выборе постоянного множителя см. ниже).

При больших положительных значениях  $x$  имеем отсюда асимптотическую формулу

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{4x^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

т. е. интенсивность экспоненциально убывает (область «тени»). При больших же по абсолютной величине отрицательных значениях  $x$  имеем:

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}} \sin^2\left[\frac{2(-x)^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} + \frac{\pi}{4}\right],$$

т. е. интенсивность быстро осциллирует; усредненное по этим осцилляциям значение равно

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

<sup>1)</sup> Функция Эйри  $\Phi(t)$  определяется формулой

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right) d\xi \quad (1)$$

(см. том III, «Квантовая механика» § b). При больших положительных значениях  $t$  функция  $\Phi(t)$  экспоненциально убывает по асимптотическому закону

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2}\right). \quad (2)$$

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях  $t$  функция  $\Phi(t)$  осциллирует с убывающей амплитудой по закону

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]. \quad (3)$$

Функция Эйри связана с функцией Макдональда (модифицированной функцией Ганкеля) порядка 1/3:

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right). \quad (4)$$

Формула (2) соответствует асимптотическому выражению функций  $K_V(t)$ :

$$K_V(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}.$$

Отсюда выясняется смысл постоянной  $A$  — она определяет интенсивность вдали от каустики, которая получилась бы из геометрической оптики без учета явлений дифракции.

Наибольшее значение, равное 0,949, функция  $\Phi(t)$  имеет при  $t = -1,02$ ; соответственно этому наибольшая интенсивность достигается при  $x(2k^2/\rho)^{1/3} = -1,02$  и равна

$$I = 2,03Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$$

(в самой же точке касания луча с каустикой,  $x = 0$ , имеем  $I = 0,89Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$ , так как  $\Phi(0) = 0,629$ ). Таким образом, вблизи каустики интенсивность пропорциональна  $k^{1/3}$ , т. е.  $\lambda^{-1/3}$  ( $\lambda$  — длина волн). При  $\lambda \rightarrow 0$  интенсивность, как и следовало (ср. § 54), стремится к бесконечности.

### § 60. Дифракция Френеля

Если источник света и точка  $P$ , в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке  $P$  играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (59,2), — участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой  $P$ . Действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в  $P$  из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой. Дифракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название *дифракции Френеля*.

Рассмотрим дифракцию Френеля от какого-нибудь экрана. Благодаря указанному свойству при этом играет роль (при заданной точке  $P$ ) только небольшой участок края экрана. Но на достаточно малых участках края экрана можно всегда считать прямолинейным. Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

Выберем в качестве плоскости  $xy$  плоскость, проходящую через источник света  $Q$  (рис. 11) и через линию края экрана. Перпендикулярную к ней плоскость  $xz$  выбираем так, чтобы она прошла через точку  $Q$  и точку наблюдения  $P$ , в которой мы ищем значение интенсивности света. Наконец, начало координат  $O$  выбираем на линии края экрана, после чего положение всех трех осей вполне определено.

Расстояние от источника света  $Q$  до начала координат пусть будет  $D_q$ .  $x$ -координату точки наблюдения  $P$  обозначим как  $D_p$ ,

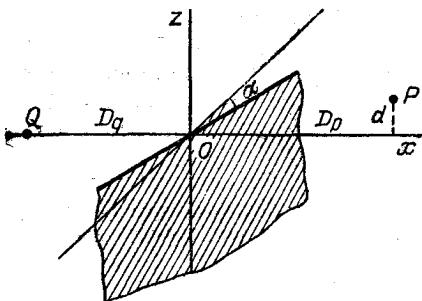


Рис. 11