

Отсюда выясняется смысл постоянной A — она определяет интенсивность вдали от каустики, которая получилась бы из геометрической оптики без учета явлений дифракции.

Наибольшее значение, равное 0,949, функция $\Phi(t)$ имеет при $t = -1,02$; соответственно этому наибольшая интенсивность достигается при $x(2k^2/\rho)^{1/3} = -1,02$ и равна

$$I = 2,03Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$$

(в самой же точке касания луча с каустикой, $x = 0$, имеем $I = 0,89Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$, так как $\Phi(0) = 0,629$). Таким образом, вблизи каустики интенсивность пропорциональна $k^{1/3}$, т. е. $\lambda^{-1/3}$ (λ — длина волн). При $\lambda \rightarrow 0$ интенсивность, как и следовало (ср. § 54), стремится к бесконечности.

§ 60. Дифракция Френеля

Если источник света и точка P , в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке P играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (59,2), — участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой P . Действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в P из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой. Дифракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название *дифракции Френеля*.

Рассмотрим дифракцию Френеля от какого-нибудь экрана. Благодаря указанному свойству при этом играет роль (при заданной точке P) только небольшой участок края экрана. Но на достаточно малых участках края экрана можно всегда считать прямолинейным. Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

Выберем в качестве плоскости xy плоскость, проходящую через источник света Q (рис. 11) и через линию края экрана. Перпендикулярную к ней плоскость xz выбираем так, чтобы она прошла через точку Q и точку наблюдения P , в которой мы ищем значение интенсивности света. Наконец, начало координат O выбираем на линии края экрана, после чего положение всех трех осей вполне определено.

Расстояние от источника света Q до начала координат пусть будет D_q . x -координату точки наблюдения P обозначим как D_p ,

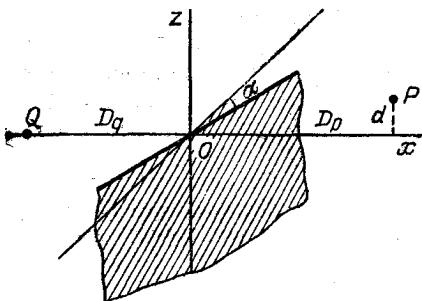


Рис. 11

а ее z -координату, т. е. расстояние до плоскости xy , — как d . Согласно геометрической оптике свет мог бы попасть только в точки, лежащие над плоскостью xy ; область же под плоскостью xy есть область, где согласно геометрической оптике была бы тень (область геометрической тени).

Мы определим теперь распределение интенсивности света за экраном вблизи границы геометрической тени, т. е. при малых (по сравнению с D_p и D_q) значениях d . Отрицательное d означает, что точка P находится в области геометрической тени.

В качестве поверхности интегрирования в (59,2) выберем полуплоскость, проходящую через линию края экрана перпендикулярно к плоскости xy . Координаты x и y точек этой поверхности связаны друг с другом соотношением $x = y \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол между линией края экрана и осью y), а координата z положительна. Поле волны, исходящей из источника Q , на расстоянии R_q от него пропорционально множителю $\exp(ikR_q)$. Поэтому поле u на поверхности интегрирования пропорционально

$$u \sim \exp[ik\sqrt{y^2 + z^2 + (D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2}].$$

В интеграле (59,2) для R надо теперь подставить

$$R = \sqrt{y^2 + (z - d)^2 + (D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

В подынтегральном выражении медленно изменяющиеся множители не существенны по сравнению с экспоненциальным. Поэтому мы можем считать $1/R$ постоянным, а вместо df_n писать $dy dz$. Мы находим тогда, что поле в точке P

$$\begin{aligned} u_P \sim & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \exp[ik\sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} + \\ & + \sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2}] dy dz. \end{aligned} \quad (60,1)$$

Как мы уже говорили, в точку P попадает свет главным образом из точек плоскости интегрирования, близких к O . Поэтому в интеграле (60,1) играют роль малые (по сравнению с D_q и D_p) значения y и z . Мы можем написать:

$$\sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} \approx D_q + \frac{y^2 + z^2}{2D_q} + y \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2} \approx D_p + \frac{y^2 + (z - d)^2}{2D_p} - y \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставим это в (60,1). Поскольку нас интересует поле только как функция от расстояния d , то постоянный множитель

$\exp[ik(D_p + D_q)]$ опускаем; интеграл по dy тоже дает выражение, не содержащее d , которое мы также опустим. Мы находим тогда:

$$u_P \sim \int_0^\infty \exp\left[ik\left(\frac{1}{2D_q}z^2 + \frac{1}{2D_p}(z-d)^2\right)\right] dz.$$

Это выражение можно написать и в таком виде:

$$u_P \sim \exp\left[ik \frac{d^2}{2(D_p + D_q)}\right] \int_0^\infty \exp\left[ik \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}\right)z - \frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}}\right] dz. \quad (60,2)$$

Интенсивность света определяется квадратом поля, т. е. квадратом модуля $|u_P|^2$. Поэтому для нахождения интенсивности стоящий перед интегралом множитель не существен, так как при умножении на сопряженное выражение он дает единицу. Очевидной подстановкой интеграл приводится к виду

$$u_P \sim \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta, \quad (60,3)$$

где

$$w = d \sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q + D_p)}}. \quad (60,4)$$

Таким образом, интенсивность I в точке P равна

$$I = \frac{I_0}{2} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2 = \frac{I_0}{2} \left[\left(C(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 \right], \quad (60,5)$$

где

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos \eta^2 d\eta, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin \eta^2 d\eta$$

— так называемые интегралы Френеля. Формула (60,5) решает поставленную задачу, определяя интенсивность света как функцию от d ; I_0 есть интенсивность в освещенной области в точках, достаточно удаленных от края тени, т. е. при $w \gg 1$ (в пределе $w \rightarrow \infty$ имеем $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$).

Области геометрической тени соответствуют отрицательные w . Легко выяснить асимптотический вид функции $I(w)$ при

больших по абсолютной величине отрицательных значениях w . Для этого поступим следующим образом. Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = -\frac{1}{2i|w|} e^{i\omega^2} + \frac{1}{2i} \int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^2}.$$

Интегрируя в правой части равенства еще раз по частям и продолжая этот процесс, получим ряд по степеням $1/|w|$:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = e^{i\omega^2} \left(-\frac{1}{2i|w|} + \frac{1}{4|w|^3} - \dots \right). \quad (60,6)$$

Хотя бесконечный ряд такого вида и не является сходящимся, но ввиду того, что при больших $|w|$ величина его последовательных членов быстро падает, уже первый его член дает хорошее представление стоящей слева функции при достаточно больших $|w|$ (ряды такого рода называются асимптотическими). Таким образом, для интенсивности $I(w)$ (60,5) получим следующую асимптотическую формулу, пригодную для больших отрицательных значений w :

$$I = \frac{I_0}{4\pi w^2}. \quad (60,7)$$

Мы видим, что в области геометрической тени, вдали от ее края интенсивность стремится к нулю обратно пропорционально квадрату расстояния от края тени.

Рассмотрим теперь положительные значения w , т. е. область выше плоскости xy . Пишем:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2} d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2} d\eta = (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_w^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta.$$

При достаточно больших w можно воспользоваться асимптотическим представлением стоящего в правой части равенства интеграла, и мы будем иметь:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \approx (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw} e^{i\omega^2}. \quad (60,8)$$

Подставляя это выражение в (60,5), получим:

$$I = I_0 \left[1 + \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\sin \left(\omega^2 - \frac{\pi}{4} \right)}{w} \right]. \quad (60,9)$$

Таким образом, в освещенной области, вдали от края тени, интенсивность имеет неограниченный ряд максимумов и

минимумов, так что отношение I/I_0 колеблется в обе стороны от единицы. Размах этих колебаний уменьшается с ростом w обратно пропорционально расстоянию от края геометрической тени, а места максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом.

При небольших w функция $I(w)$ имеет качественно тот же характер (рис. 12). В области геометрической тени интенсивность спадает монотонно при удалении от границы тени (на



Рис. 12

самой этой границе $I/I_0 = 1/4$). При положительных w интенсивность имеет чередующиеся максимумы и минимумы. В первом, наибольшем из максимумов, $I/I_0 = 1,37$.

§ 61. Дифракция Фраунгофера

Особый интерес для физических применений имеют дифракционные явления, возникающие при падении на экраны плоско-параллельного пучка лучей. В результате дифракции пучок теряет параллельность и появляется свет, распространяющийся в направлениях, отличных от первоначального. Поставим задачу об определении распределения по направлениям интенсивности дифрагированного света на больших расстояниях позади экрана (такая постановка вопроса отвечает так называемой *дифракции Фраунгофера*). При этом мы снова ограничиваемся случаем малых отклонений от геометрической оптики, т. е. предполагаем малыми углы отклонения от первоначального направления лучей (углы дифракции).

Поставленную задачу можно было бы решить, исходя из общей формулы (59,2), переходя в неё к пределу бесконечно удаленных от экрана источника света и точки наблюдения. Характерной особенностью рассматриваемого случая является при этом то обстоятельство, что в интегrale, определяющем интенсивность дифрагированного света, существенна вся волновая поверхность, по которой производится интегрирование (в противоположность случаю дифракции Френеля, в котором играли