минимумов, так что отношение I/I_0 колеблется в обе стороны от единицы. Размах этих колебаний уменьшается с ростом w обратно пропорционально расстоянию от края геометрической тени, а места максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом.

При небольших w функция $I(w)$ имеет качественно тот же характер (рис. 12). В области геометрической тени интенсивность спадает монотонно при удалении от границы тени (на

Рис. 12

самой этой границе $I/I_0 = 1/4$). При положительных w интенсивность имеет чередующиеся максимумы и минимумы. В первом, наибольшем из максимумов, $I/I_0 = 1{,}37$.

§ 61. Дифракция Фраунгофера

Особый интерес для физических применений имеют дифракционные явления, возникающие при падении на экраны плоскопараллельного пучка лучей. В результате дифракции пучок теряет параллельность и появляется свет, распространяющийся в направлениях, отличных от первоначального. Поставим задачу об определении распределения по направлениям интенсивности дифрагированного света на больших расстояниях позади экрана (такая постановка вопроса отвечает так называемой *дифракции Фраунгофера*). При этом мы снова ограничиваемся случаем малых отклонений от геометрической оптики, т. е. предполагаем малыми углы отклонения от первоначального направления лучей (углы дифракции).

Поставленную задачу можно было бы решить, исходя из общей формулы (59,2), переходя в ней к пределу бесконечно удаленных от экрана источника света и точки наблюдения. Характерной особенностью рассматриваемого случая является при этом то обстоятельство, что в интеграле, определяющем интенсивность дифрагированного света, существенна вся волновая поверхность, по которой производится интегрирование (в противоположность случаю дифракции Френеля, в котором играли

роль лишь участки волновой поверхности вблизи края экранов)[1]).

Проще, однако, рассмотреть поставленный вопрос заново, не прибегая к помощи общей формулы (59,2).

Обозначим посредством u_0 то поле позади экранов, которое имелось бы при строгом соблюдении геометрической оптики. Оно представляет собой плоскую волну, в поперечном сечении которой, однако, имеются участки (отвечающие «тени» непрозрачных экранов) с равным нулю полем. Обозначим посредством S ту часть плоскости поперечного сечения, на которой поле u_0 отлично от нуля; поскольку каждая такая плоскость является волновой поверхностью плоской волны, то $u_0 = \text{const}$ вдоль всей площади S.

В действительности, однако, волна с ограниченной площадью поперечного сечения не может быть строго плоской (см. § 58). В ее пространственное разложение Фурье входят компоненты с волновыми векторами различных направлений, что и является источником дифракции.

Разложим поле u_0 в двухмерный интеграл Фурье по координатам y, z в плоскости поперечного сечения волны. Для компонент Фурье имеем:

$$u_{\mathbf{q}} = \iint\limits_S u_0 e^{-i\mathbf{qr}}\, dy\, dz, \tag{61,1}$$

где $\mathbf{q}$ — постоянный вектор в плоскости yz; интегрирование производится фактически лишь по той части S плоскости yz, на которой u_0 отлично от нуля. Если $\mathbf{k}$ есть волновой вектор падающей волны, то компоненте поля $u_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qr}}$ отвечает волновой вектор $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. Таким образом, вектор $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ определяет изменение волнового вектора света при дифракции. Поскольку абсолютные значения $k = k' = \omega/c$, то малые углы дифракции θ_y, θ_z в плоскостях xy и xz, связаны с составляющими вектора $\mathbf{q}$ соотношениями

$$q_y = \frac{\omega}{c}\theta_y, \quad q_z = \frac{\omega}{c}\theta_z. \tag{61,2}$$

При малом отклонении от геометрической оптики компоненты разложения поля u_0 можно считать совпадающими

[1]) Критерии дифракции Френеля и Фраунгофера легко получить, вернувшись к формуле (60,2) и применив ее, например, к щели ширины a (вместо края изолированного экрана). Интегрирование по dz в (60,2) должно производиться при этом в пределах от 0 до a. Дифракции Френеля соответствует ситуация, когда в экспоненте подынтегрального выражения существен член с z^2 и верхний предел интеграла может быть заменен на ∞. Для этого должно быть

$$ka^2\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}\right) \gg 1.$$

Напротив, если в этом неравенстве стоит обратный знак, член с z^2 может быть опущен; этому соответствует случай дифракции Фраунгофера.

с компонентами истинного поля дифрагированного света, так что формула (61,1) решает поставленную задачу.

Распределение интенсивности дифрагированного света определяется квадратом $|u_{\mathbf{q}}|^2$ как функцией вектора $\mathbf{q}$. Количественная связь с интенсивностью падающего света устанавливается формулой

$$\iint u_0^2\, dy\, dz = \iint |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y\, dq_z}{(2\pi)^2} \tag{61,3}$$

(ср. (49,8)). Отсюда видно, что относительная интенсивность дифракции в элемент телесного угла $do = d\theta_y d\theta_z$ дается величиной

$$\frac{|u_{\mathbf{q}}|^2}{u_0^2} \frac{dq_y\, dq_z}{(2\pi)^2} = \left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \left|\frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0}\right|^2 do. \tag{61,4}$$

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от двух экранов, являющихся «дополнительными» по отношению друг к другу: первый экран имеет отверстия там, где второй непрозрачен, и наоборот. Обозначим посредством $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ поле света, дифрагировавшего на этих экранах (при одинаковом в обоих случаях падающем свете). Поскольку $u_{\mathbf{q}}^{(1)}$ и $u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ выражаются интегралами (61,1), взятыми по площадям отверстий в экранах, а отверстия в обоих экранах дополняют друг друга до целой плоскости, то сумма $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ есть компонента Фурье поля, получающегося при отсутствии экранов, т. е. просто падающего света. Но падающий свет представляет собой строго плоскую волну с определенным направлением распространения, поэтому $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)} = 0$ при всяком отличном от нуля $\mathbf{q}$. Таким образом, имеем $u_{\mathbf{q}}^{(1)} = -u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ или, для соответствующих интенсивностей,

$$|u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 = |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 \quad \text{при } \mathbf{q} \neq 0. \tag{61,5}$$

Это значит, что дополнительные экраны дают одинаковые распределения интенсивности дифрагированного света (так называемый *принцип Бабине*).

Упомянем здесь об одном интересном следствии принципа Бабине. Рассмотрим какое-нибудь черное тело, т. е. тело, полностью поглощающее весь падающий на него свет. Согласно геометрической оптике при освещении такого тела за ним образовалась бы область геометрической тени, площадь сечения которой была бы равна площади сечения тела в направлении, перпендикулярном к направлению падения света. Наличие дифракции приведет, однако, к частичному отклонению света от первоначального направления. В результате на большом расстоянии позади тела тени не будет, а наряду со светом, распространяющимся в первоначальном направлении, будет также и некоторое количество света, распространяющегося под небольшими углами

к своему первоначальному направлению. Легко определить интенсивность этого, как говорят, рассеянного света. Для этого замечаем, что согласно принципу Бабине количество света, отклонившегося вследствие дифракции на рассматриваемом теле, равно количеству света, отклоняющегося при дифракции от прорезанного в непрозрачном экране отверстия, форма и площадь которого совпадают с формой и площадью поперечного сечения тела. Но при дифракции Фраунгофера от отверстия происходит отклонение всего проходящего через отверстие света. Отсюда следует, что полное количество света, рассеянного на черном теле, равно количеству света, падающего на его поверхность и поглощаемого им.

Задачи

1. Определить дифракцию Фраунгофера при нормальном падении плоской волны на бесконечную щель (ширины $2a$) с параллельными краями, прорезанную в непрозрачном экране.

Решение. Выберем плоскость щели в качестве плоскости yz с осью z вдоль длины щели (рис. 13 представляет разрез экрана). При нормальном

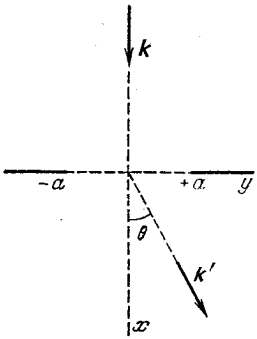

Рис. 13

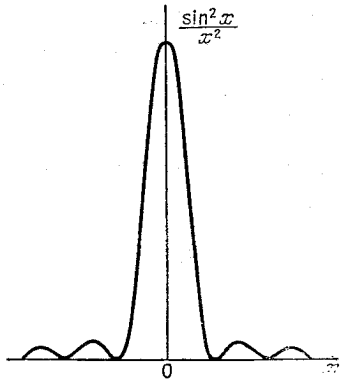

Рис. 14

падении света плоскость щели является одной из волновых поверхностей, которую мы возьмем в качестве поверхности интегрирования в (61,1). Ввиду бесконечности длины щели свет отклоняется только в плоскости xy (интеграл (61,1) обращается в нуль при $q_z \neq 0$). Поэтому разложение поля u_0 должно производиться лишь по координате y:

$$u_q = u_0 \int_{-a}^{a} e^{-iqy}\, dy = \frac{2u_0}{q} \sin qa.$$

Интенсивность дифрагированного света в интервале углов $d\theta$ есть

$$dI = \frac{I_0}{2a} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 \frac{dq}{2\pi} = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2}\, d\theta,$$

где $k = \omega/c$, а I_0 — полная интенсивность света, падающего на щель.

$dI/d\theta$ как функция угла дифракции имеет вид, изображенный на рис. 14. При увеличении θ в ту или другую сторону от $\theta = 0$ интенсивность пробегает ряд максимумов с быстро убывающей высотой. Максимумы разделены в точках $\theta = n\pi/ka$ (n — целые числа) минимумами, в которых интенсивность обращается в нуль.

2. То же при дифракции от решетки — плоского экрана с прорезанным в нем рядом одинаковых параллельных щелей (ширина щели $2a$, ширина непрозрачного экрана между соседними щелями $2b$, число щелей N).

Решение. Выберем плоскость решетки в качестве плоскости yz с осью z, параллельной щелям. Дифракция снова происходит лишь в плоскости xy, и интегрирование в (61,1) дает:

$$u_q = u'_q \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2inqd} = u'_q \frac{1 - e^{-2iNqd}}{1 - e^{-2iqd}},$$

где $d = a + b$, а u'_q есть результат интегрирования по одной щели. Воспользовавшись результатами задачи 1, получим:

$$dI = \frac{I_0 a}{N\pi}\left(\frac{\sin Nqd}{\sin qd}\right)^2 \left(\frac{\sin qa}{qa}\right)^2 dq = \frac{I_0}{N\pi ak}\left(\frac{\sin Nk\theta d}{\sin k\theta d}\right)^2 \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta$$

(I_0 — полная интенсивность света, проходящего через все щели).

При большом числе щелей ($N \to \infty$) эту формулу можно написать в ином виде. При значениях $q = \pi n/d$ (n — целое число) dI/dq имеет максимумы; вблизи такого максимума (т. е. при $qd = n\pi + \varepsilon$, ε мало)

$$dI = I_0 a \left(\frac{\sin qa}{qa}\right)^2 \frac{\sin^2 N\varepsilon}{\pi N \varepsilon^2}\, dq.$$

Но при $N \to \infty$ имеет место формула [1])

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sin^2 Nx}{\pi N x^2} = \delta(x).$$

Поэтому вблизи каждого максимума имеем:

$$dI = I_0 \frac{a}{d}\left(\frac{\sin qa}{qa}\right)^2 \delta(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

т. е. максимумы обладают, в пределе, бесконечно малой шириной, а полная интенсивность света в n-м максимуме есть

$$I^{(n)} = I_0 \frac{d}{\pi^2 a} \frac{\sin^2(n\pi a/d)}{n^2}.$$

3. Определить распределение интенсивности по направлениям при дифракции света, падающего в нормальном направлении на круглое отверстие радиуса a.

---

[1]) При $x \neq 0$ функция в левой стороне равенства равна нулю, а согласно формулам, известным из теории рядов Фурье,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x)\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\,dx\right) = f(0).$$

Отсюда видно, что свойства этой функции действительно совпадают со свойствами δ-функции (см. примечание на стр. 100).

Решение. Введем цилиндрические координаты z, r, φ с осью z, проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости. Очевидно, что дифракция симметрична относительно оси z, так что вектор $\mathbf{q}$ имеет лишь радиальную компоненту $q_r = q = k\theta$. Отсчитывая угол φ от направления $\mathbf{q}$ и интегрируя в (61,1) по плоскости отверстия, находим:

$$u_q = u_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\varphi} r\, d\varphi\, dr = 2\pi u_0 \int_0^a J_0(qr)\, r\, dr,$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. С помощью известной формулы

$$\int_0^a J_0(qr)\, r\, dr = \frac{a}{q} J_1(aq)$$

имеем отсюда:

$$u_q = \frac{2\pi u_0 a}{q} J_1(aq),$$

и согласно (61,4) находим окончательно интенсивность света, дифрагировавшего в элемент телесного угла do:

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2} do,$$

где I_0 — полная интенсивность света, падающего на отверстие.