

ГЛАВА VIII

ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

§ 62. Запаздывающие потенциалы

В гл. V мы изучали постоянное поле, создаваемое покоящимися зарядами, а в гл. VI — переменное поле, но в отсутствие зарядов. Теперь мы займемся изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы поля, создаваемого движущимися зарядами. Это удобно сделать в четырехмерном виде, повторив произведенный в конце § 46 вывод с той лишь разницей, что надо использовать уравнения Максвелла (30,2)

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

с отличной от нуля правой частью. Такая же правая часть появится и в уравнении (46,8), и после наложения на потенциалы условия Лоренца

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \text{ т. е. } \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (62,1)$$

получим

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (62,2)$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы произвольного электромагнитного поля. В трехмерном виде оно записывается в виде двух уравнений — для \mathbf{A} и для Φ :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (62,3)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (62,4)$$

Для постоянного поля они сводятся к уже известным нам уравнениям (36,4) и (43,4), а для переменного поля без зарядов — к однородным волновым уравнениям.

Решение неоднородных линейных уравнений (62,3—4) может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений

с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд de в заданном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\delta(\mathbf{R})$, где \mathbf{R} — расстояние от начала координат. Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\delta(\mathbf{R}). \quad (62,5)$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \quad (62,6)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае ϕ обладает центральной симметрией, т. е. есть функция только от R . Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (62,6) приобретет вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\phi = \chi(R, t)/R$. Тогда для χ мы получим:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид (см. § 47):

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций f_1 и f_2 . Обычно бывает удобным выбирать $f_2 = 0$ (см. об этом ниже). Тогда потенциал ϕ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\phi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \quad (62,7)$$

Функция χ в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать χ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение (62,5). Это легко сделать, заметив, что при $R \rightarrow 0$ сам

потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $R \rightarrow 0$ в уравнении (62,5) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\Delta \Phi$. Тогда оно переходит в известное уже нам уравнение (36,9), приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат формула (62,7) должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t) = de(t)$, т. е.

$$\Phi = \frac{de \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}.$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (62,4) для произвольного распределения зарядов $\rho(x, y, z, t)$. Для этого достаточно написать $de = \rho dV$ (dV — элемент объема) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (62,4) можно прибавить еще решение Φ_0 этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение имеет вид

$$\Phi(r, t) = \int \frac{1}{R} \rho \left(r', t - \frac{R}{c} \right) dV' + \Phi_0, \quad (62,8)$$

$$R = r - r', \quad dV' = dx' dy' dz',$$

где $r = (x, y, z)$, $r' = (x', y', z')$; R есть расстояние от элемента объема dV' до «точки наблюдения», в которой мы ищем значение потенциала. Мы будем писать это выражение коротко в виде

$$\Phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV + \Phi_0, \quad (62,9)$$

где индекс показывает, что значение ρ надо брать в момент времени $t - R/c$, а штрих у dV опущен.

Аналогичным образом имеем для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV + \mathbf{A}_0, \quad (62,10)$$

где \mathbf{A}_0 — решение уравнения (62,3) без правой части.

Выражения (62,9—10) (без Φ_0 и \mathbf{A}_0) называются запаздывающими потенциалами.

В случае неподвижных зарядов (т. е. не зависящей от времени плотности ρ) формула (62,9) переходит в известную уже нам формулу (36,8) для потенциала электростатического поля; формула же (62,10) в случае стационарного движения зарядов переходит (после усреднения) в формулу (43,5) для векторного потенциала постоянного магнитного поля.

Величины Φ_0 и \mathbf{A}_0 в (62,9—10) определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого, очевидно, было бы до-

статочно задать начальные условия, т. е. поле в начальный момент времени. Однако с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих R . Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы. Таким образом, последние представляют собой поле, исходящее от системы, а Φ_0 и A_0 надо отождествить с внешним полем, действующим на систему.

§ 63. Потенциалы Лиенара — Вихерта

Определим потенциалы поля, создаваемого одним точечным зарядом, совершающим заданное движение по траектории $r = r_0(t)$.

Согласно формулам запаздывающих потенциалов поле в точке наблюдения $P(x, y, z)$ в момент времени t определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени t' , для которого время распространения светового сигнала из точки нахождения заряда $r_0(t')$ в точку наблюдения P как раз совпадает с разностью $t - t'$. Пусть $R(t) = r - r_0(t)$ — радиус-вектор от заряда e в точку P ; вместе с $r_0(t)$ он является заданной функцией времени. Тогда момент t' определяется уравнением

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \quad (63,1)$$

Для каждого значения t это уравнение имеет всего один корень t' ¹⁾.

¹⁾ Это обстоятельство довольно очевидно само по себе, но в его справедливости можно убедиться и непосредственно. Для этого выберем точку наблюдения P и момент наблюдения t в качестве начала O четырехмерной системы координат и построим световой конус (§ 2) с вершиной в O . Нижняя полость этого конуса, охватывающая область абсолютно прошедшего (по отношению к событию O), представляет собой геометрическое место мировых точек, таких, что посланный из них сигнал достигнет точки O . Точки же, в которых эта гиперповерхность пересекается мировой линией движения заряда, как раз и соответствуют корням уравнения (63,1). Но поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то ее мировая линия имеет везде меньший наклон к оси времени, чем наклон светового конуса. Отсюда и следует, что мировая линия частицы может пересечь нижнюю полость светового конуса только в одной точке.