статочно задать начальные условия, т. е. поле в начальный момент времени. Однако с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих R. Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы. Таким образом, последние представляют собой поле, исходящее от системы, а φ_0 и $\mathbf{A}_0$ надо отождествить с внешним полем, действующим на систему.

§ 63. Потенциалы Лиенара — Вихерта

Определим потенциалы поля, создаваемого одним точечным зарядом, совершающим заданное движение по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$.

Согласно формулам запаздывающих потенциалов поле в точке наблюдения $P(x, y, z)$ в момент времени t определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени t', для которого время распространения светового сигнала из точки нахождения заряда $\mathbf{r}_0(t')$ в точку наблюдения P как раз совпадает с разностью $t - t'$. Пусть $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор от заряда e в точку P; вместе с $\mathbf{r}_0(t)$ он является заданной функцией времени. Тогда момент t' определяется уравнением

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \tag{63,1}$$

Для каждого значения t это уравнение имеет всего один корень t' [1]).

---

[1]) Это обстоятельство довольно очевидно само по себе, но в его справедливости можно убедиться и непосредственно. Для этого выберем точку наблюдения P и момент наблюдения t в качестве начала O четырехмерной системы координат и построим световой конус (§ 2) с вершиной в O. Нижняя полость этого конуса, охватывающая область абсолютно прошедшего (по отношению к событию O), представляет собой геометрическое место мировых точек, таких, что посланный из них сигнал достигнет точки O. Точки же, в которых эта гиперповерхность пересекается мировой линией движения заряда, как раз и соответствуют корням уравнения (63,1). Но поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то ее мировая линия имеет везде меньший наклон к оси времени, чем наклон светового конуса. Отсюда и следует, что мировая линия частицы может пересечь нижнюю полость светового конуса только в одной точке.

В системе отсчета, в которой в момент времени t' частица покоится, поле в точке наблюдения в момент t дается просто кулоновским потенциалом, т. е.

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0. \tag{63,2}$$

Выражения для потенциалов в произвольной системе отсчета мы получим теперь, написав такой 4-вектор, который бы при скорости $\mathbf{v} = 0$ давал для φ и $\mathbf{A}$ значения (63,2). Замечая, что согласно (63,1) φ из (63,2) можно написать также и в виде

$$\varphi = \frac{e}{c(t - t')},$$

находим, что искомый 4-вектор есть

$$A^i = e\frac{u^i}{R_k u^k}, \tag{63,3}$$

где u^k — 4-скорость заряда, а 4-вектор $R^k = [c(t - t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']$, причем x', y', z', t' связаны друг с другом соотношением (63,1); последнее может быть записано в инвариантном виде как

$$R_k R^k = 0. \tag{63,4}$$

Переходя теперь снова к трехмерным обозначениям, получим для потенциалов поля, создаваемого произвольно движущимся точечным зарядом, следующие выражения:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \tag{63,5}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения P, и все величины в правых частях равенств должны быть взяты в момент времени t', определяющийся из (63,1). Потенциалы поля в виде (63,5) называются *потенциалами Лиенара — Вихерта.*

Для вычисления напряженностей электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

надо дифференцировать φ и $\mathbf{A}$ по координатам x, y, z точки и моменту t наблюдения. Между тем формулы (63,5) выражают потенциалы как функции от t' и лишь через соотношение (63,1) — как неявные функции от x, y, z, t. Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от t'. Дифференцируя соотношение $R(t') = c(t - t')$ по t, имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{Rv}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

(значение $\partial R/\partial t'$ получается дифференцированием тождества $R^2 = \mathbf{R}^2$ и подстановкой $\partial \mathbf{R}(t')/\partial t = -\mathbf{v}(t')$; знак минус здесь связан с тем, что $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор от заряда e в точку P, а не наоборот). Отсюда

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{vR}}{Rc}}. \tag{63,6}$$

Аналогично, дифференцируя то же соотношение по координатам, найдем:

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad} R(t') = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t' + \frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

откуда

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}. \tag{63,7}$$

С помощью этих формул не представляет труда вычислить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Опуская промежуточные вычисления, приведем получающийся результат:

$$\mathbf{E} = e\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \tag{63,8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \tag{63,9}$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v}/\partial t'$; все величины в правых сторонах равенств берутся в момент t'. Интересно отметить, что магнитное поле оказывается везде перпендикулярным к электрическому.

Электрическое поле (63,8) состоит из двух частей различного характера. Первый член зависит только от скорости частицы (но не от ее ускорения) и на больших расстояниях меняется как $1/R^2$. Второй член зависит от ускорения, а при больших R меняется как $1/R$. Мы увидим ниже (§ 66), что этот последний член связан с излучаемыми частицей электромагнитными волнами.

Что касается первого члена, то, будучи независимым от ускорения, он должен соответствовать полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом. Действительно, при постоянной скорости разность

$$\mathbf{R}_{t'} - \frac{\mathbf{v}}{c}R_{t'} = \mathbf{R}_{t'} - \mathbf{v}(t - t')$$

есть расстояние $\mathbf{R}_t$ от заряда до точки наблюдения в самый момент наблюдения. Легко также убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$R_{t'} - \frac{1}{c}\mathbf{R}_{t'}\mathbf{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{R}_t]^2} = R_t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_t},$$

где θ_t — угол между $\mathbf{R}_t$ и $\mathbf{v}$. В результате первый член в (63,8) оказывается совпадающим с выражением (38,8).

Задача

Вывести потенциалы Лиенара — Вихерта путем интегрирования в формулах (62,9—10).

Решение. Напишем формулу (62,8) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int\int \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,\delta\left(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) d\tau\, dV'$$

(и аналогично для $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$), введя в нее лишнюю δ-функцию и тем самым избавившись от неявных аргументов в функции ρ. Для точечного заряда, движущегося по заданной траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, имеем:

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)].$$

Подставив это выражение и произведя интегрирование по dV', получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e\int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|}\,\delta\left[\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|\right].$$

Интегрирование по $d\tau$ производится с помощью формулы

$$\delta[F(\tau)] = \frac{\delta(\tau - t')}{|F'(t')|}$$

(где t' — корень уравнения $F(t') = 0$) и приводит к формуле (63,5).

§ 64. Спектральное разложение запаздывающих потенциалов

Поле, создаваемое движущимися зарядами, можно разложить на монохроматические волны. Потенциалы отдельной монохроматической компоненты поля имеют вид $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. Плотности заряда и тока создающей поле системы тоже можно подвергнуть спектральному разложению. Ясно, что за создание определенной монохроматической компоненты поля ответственны соответствующие компоненты от ρ и $\mathbf{j}$.

Для того чтобы выразить спектральные компоненты поля через компоненты плотностей заряда и тока, подставляем в (62,9) вместо φ и ρ соответственно $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$ и $\rho_\omega e^{-i\omega t}$. Мы находим тогда:

$$\varphi_\omega e^{-i\omega t} = \int \rho_\omega \frac{e^{-i\omega(t - R/c)}}{R}\,dV.$$