есть расстояние $\mathbf{R}_t$ от заряда до точки наблюдения в самый момент наблюдения. Легко также убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$R_{t'} - \frac{1}{c}\mathbf{R}_{t'}\mathbf{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{R}_t]^2} = R_t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_t},$$

где θ_t — угол между $\mathbf{R}_t$ и $\mathbf{v}$. В результате первый член в (63,8) оказывается совпадающим с выражением (38,8).

Задача

Вывести потенциалы Лиенара — Вихерта путем интегрирования в формулах (62,9—10).

Решение. Напишем формулу (62,8) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \iint \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,\delta\left(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) d\tau\, dV'$$

(и аналогично для $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$), введя в нее лишнюю δ-функцию и тем самым избавившись от неявных аргументов в функции ρ. Для точечного заряда, движущегося по заданной траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, имеем:

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)].$$

Подставив это выражение и произведя интегрирование по dV', получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e\int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|}\,\delta\left[\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|\right].$$

Интегрирование по $d\tau$ производится с помощью формулы

$$\delta[F(\tau)] = \frac{\delta(\tau - t')}{|F'(t')|}$$

(где t' — корень уравнения $F(t') = 0$) и приводит к формуле (63,5).

§ 64. Спектральное разложение запаздывающих потенциалов

Поле, создаваемое движущимися зарядами, можно разложить на монохроматические волны. Потенциалы отдельной монохроматической компоненты поля имеют вид $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. Плотности заряда и тока создающей поле системы тоже можно подвергнуть спектральному разложению. Ясно, что за создание определенной монохроматической компоненты поля ответственны соответствующие компоненты от ρ и $\mathbf{j}$.

Для того чтобы выразить спектральные компоненты поля через компоненты плотностей заряда и тока, подставляем в (62,9) вместо φ и ρ соответственно $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$ и $\rho_\omega e^{-i\omega t}$. Мы находим тогда:

$$\varphi_\omega e^{-i\omega t} = \int \rho_\omega \frac{e^{-i\omega(t - R/c)}}{R}\, dV.$$

Сокращая на $e^{-i\omega t}$ и вводя абсолютную величину волнового вектора $k=\omega/c$, имеем:

$$\varphi_\omega=\int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R}\,dV. \tag{64,1}$$

Аналогично, для $\mathbf{A}_\omega$ получим:

$$\mathbf{A}_\omega=\int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR}\,dV. \tag{64,2}$$

Заметим, что формула (64,1) представляет собой обобщение решения уравнения Пуассона на более общее уравнение вида

$$\Delta\varphi_\omega+k^2\varphi_\omega=-4\pi\rho_\omega \tag{64,3}$$

(получающееся из уравнения (62,4) при ρ, φ, зависящих от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$).

При разложении в интеграл Фурье компонента Фурье плотности заряда есть

$$\rho_\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho e^{i\omega t}\,dt.$$

Подставляя это выражение в (64,1), получим:

$$\varphi_\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\rho}{R}e^{i(\omega t+kR)}\,dV\,dt. \tag{64,4}$$

Здесь надо еще перейти от непрерывного распределения плотности зарядов к точечным зарядам, о движении которых фактически идет речь. Так, если имеется всего один точечный заряд, то полагаем:

$$\rho=e\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)],$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор заряда, являющийся заданной функцией времени. Подставляя это выражение в (64,4) и производя интегрирование по dV (сводящееся к замене $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_0(t)$), получим:

$$\varphi_\omega=e\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R(t)}e^{i\omega[t+R(t)/c]}\,dt, \tag{64,5}$$

где теперь $R(t)$ — расстояние от движущейся частицы до точки наблюдения. Аналогичным образом, для векторного потенциала получим:

$$\mathbf{A}_\omega=\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)}e^{i\omega[t+R(t)/c]}\,dt, \tag{64,6}$$

где $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}_0(t)$ — скорость частицы.

Формулы, аналогичные (64,5—6), могут быть написаны и в случае, когда спектральное разложение плотностей заряда и тока содержит дискретный ряд частот. Так, при периодическом (с периодом $T = 2\pi/\omega_0$) движении точечного заряда спектральное разложение поля содержит лишь частоты вида $n\omega_0$ и соответствующие компоненты векторного потенциала

$$\mathbf{A}_n = \frac{e}{cT}\int_0^T \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)}\, e^{in\omega_0[t+R(t)/c]}\, dt \tag{64,7}$$

(и аналогично для φ_n). В обоих случаях (64,6—7) компоненты Фурье определены в соответствии с § 49.

Задача

Разложить поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда на плоские волны.

Решение. Поступаем аналогично тому, как делалось в § 51. Плотность заряда пишем в виде $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Взяв компоненту Фурье от уравнения $\Box\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, находим:

$$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}} = -4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{vk})t}.$$

С другой стороны, из

$$\varphi = \int e^{i\mathbf{kr}}\varphi_{\mathbf{k}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

имеем:

$$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

откуда окончательно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e\,\frac{e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ обладает частотой $\omega = \mathbf{kv}$.

Аналогично находим для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{c}\,\frac{\mathbf{v}e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Наконец, для поля имеем:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{kv})}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = i4\pi e\,\frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{kv})\mathbf{v}}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}\, e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{kA}_{\mathbf{k}}] = i\frac{4\pi e}{c}\,\frac{[\mathbf{kv}]}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}\, e^{-i(\mathbf{kv})t}.$$