

§ 65. Функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка

В обычной классической механике систему взаимодействующих друг с другом частиц можно описывать с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей этих частиц (в один и тот же момент времени). Возможность этого в конечном итоге обусловлена тем, что в механике скорость распространения взаимодействий предполагается бесконечной.

Мы уже знаем, что благодаря конечной скорости распространения взаимодействий поле надо рассматривать как самостоятельную систему с собственными «степенями свободы». Поэтому если мы имеем систему взаимодействующих частиц (зарядов), то для ее описания мы должны рассматривать систему, состоящую из этих частиц и поля. В связи с этим при учете конечной скорости распространения взаимодействий невозможно строгое описание системы взаимодействующих частиц с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей частиц и не содержащей никаких величин, связанных с собственными «степенями свободы» поля.

Однако если скорости v всех частиц малы по сравнению со скоростью света, то систему зарядов можно описывать некоторой приближенной функцией Лагранжа. При этом оказывается возможным ввести функцию Лагранжа, описывающую систему не только при пренебрежении всеми степенями v/c (классическая функция Лагранжа), но и с точностью до величин порядка v^2/c^2 . Последнее обстоятельство связано с тем, что излучение электромагнитных волн движущимися зарядами (и, тем самым, возникновение «самостоятельного» поля) появляется лишь в третьем приближении по v/c (см. ниже, § 67)¹⁾.

Предварительно заметим, что в нулевом приближении, т. е. при полном пренебрежении запаздыванием потенциалов, функция Лагранжа для системы зарядов имеет вид

$$L^{(0)} = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \quad (65,1)$$

(суммирование производится по зарядам, входящим в состав системы). Второй член есть потенциальная энергия взаимодействия, какой она была бы для неподвижных зарядов.

Для получения следующего приближения поступим следующим образом. Функция Лагранжа для заряда e_a , находящегося

¹⁾ Для системы, состоящей из частиц, у которых отношения зарядов к массам одинаковы, появление излучения отодвигается до пятого приближения по v/c ; в таком случае существует функция Лагранжа и с точностью до членов порядка $(v/c)^4$. (См. Barker B. M., O'Connell R. F.—Canad. J. Phys., 58, 1659 (1980).)

в^о внешнем поле, есть

$$L_a = -m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} - e_a \Phi + \frac{e_a}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}_a. \quad (65,2)$$

Выбрав какой-либо один из зарядов системы, мы определим потенциалы поля, создаваемого всеми остальными зарядами в точке, где находится первый, и выразим их через координаты и скорости зарядов, создающих это поле (как раз это можно сделать только приближенно: Φ — с точностью до членов порядка v^2/c^2 , а \mathbf{A} — до членов порядка v/c). Подставляя полученные таким образом выражения для потенциалов в (65,2), мы получим функцию Лагранжа для одного из зарядов системы (при данном движении остальных). Отсюда уже без труда можно найти L для всей системы.

Будем исходить из выражений для запаздывающих потенциалов:

$$\Phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV.$$

Если скорости всех зарядов малы по сравнению со скоростью света, то распределение зарядов не успевает сильно измениться за время R/c . Поэтому мы можем разложить $\rho_{t-R/c}$ и $\mathbf{j}_{t-R/c}$ в ряд по степеням R/c . Для скалярного потенциала находим, таким образом, с точностью до членов второго порядка:

$$\Phi = \int \frac{\rho dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho dV.$$

(ρ без индексов есть ρ в момент времени t ; знаки дифференцирования по времени могут, очевидно, быть вынесены из-под знака интеграла). Но $\int \rho dV$ есть постоянный полный заряд системы. Поэтому второй член в полученном выражении равен нулю, так что

$$\Phi = \int \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho dV. \quad (65,3)$$

Аналогично можно поступить с \mathbf{A} . Но выражение для векторного потенциала через плотность тока содержит уже само по себе $1/c$, а при подстановке в функцию Лагранжа умножается еще раз на $1/c$. Поскольку мы ищем функцию Лагранжа только с точностью до членов второго порядка, то в разложении \mathbf{A} достаточно ограничиться только первым членом, т. е.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\rho \mathbf{v}}{R} dV \quad (65,4)$$

(мы подставили $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$).

Предположим сначала, что поле создается всего одним точечным зарядом e . Тогда имеем из (65,3—4):

$$\Phi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{ev}{cR}, \quad (65,5)$$

где R — расстояние от заряда.

Выберем вместо Φ и \mathbf{A} другие потенциалы Φ' и \mathbf{A}' , т. е. произведем калибровочное преобразование (см. § 18):

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

причем в качестве f выберем функцию

$$f = \frac{e}{2c} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Тогда мы получим¹⁾:

$$\Phi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{ev}{cR} + \frac{e}{2c} \nabla \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Для вычисления \mathbf{A}' заметим, что $\nabla \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla R$. Операция ∇ означает здесь дифференцирование по координатам точки наблюдения, в которой ищется значение \mathbf{A}' . Поэтому градиент ∇R равен единичному вектору \mathbf{n} , направленному от заряда e к точке наблюдения, так что

$$\mathbf{A}' = \frac{ev}{cR} + \frac{e}{2c} \dot{\mathbf{n}}.$$

Далее пишем:

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R} \ddot{\mathbf{R}}}{R^2}.$$

Но производная $-\dot{\mathbf{R}}$ при заданной точке наблюдения есть скорость v заряда, а производную $\dot{\mathbf{R}}$ легко определить, дифференцируя тождество $R^2 = \mathbf{R}^2$, т. е. написав

$$R \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{Rv}.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + (\mathbf{nv}) \mathbf{n}}{R}.$$

Подставляя это в выражение для \mathbf{A}' , находим окончательно:

$$\Phi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{nv}) \mathbf{n}]}{2cR}. \quad (65,6)$$

¹⁾ Эти потенциалы уже не удовлетворяют условию Лоренца (62,1), а потому и уравнениям (62,3—4).

Если поле создается не одним, а несколькими зарядами, то надо, очевидно, просуммировать эти выражения по всем зарядам.

Подставляя их затем в (65,2), найдем функцию Лагранжа L_a заряда e_a (при заданном движении всех остальных зарядов). При этом нужно первый член в (65,2) тоже разложить по степеням v_a/c , оставляя члены до второго порядка. Таким образом, мы находим:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2} - e_a \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_a}{2c^2} \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} \times \\ \times [v_a v_b + (v_a n_{ab}) (v_b n_{ab})]$$

(суммирование производится по всем зарядам, за исключением e_a ; n_{ab} — единичный вектор в направлении между e_b и e_a).

Отсюда уже не представляет труда найти функцию Лагранжа для всей системы. Легко сообразить, что эта функция равна не сумме L_a для всех зарядов, а имеет вид

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \\ + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}} [v_a v_b + (v_a n_{ab}) (v_b n_{ab})]. \quad (65,7)$$

Действительно, для каждого из зарядов при заданном движении всех остальных эта функция L переходит в приведенную выше L_a . Выражение (65,7) есть искомая функция Лагранжа системы зарядов с точностью до членов второго порядка (*C. G. Darwin, 1922*).

Наконец, определим еще функцию Гамильтона системы зарядов в том же приближении. Это можно было бы сделать по общим правилам нахождения \mathcal{H} по L ; однако проще поступить следующим образом. Второй и четвертый члены в (65,7) представляют собой малую поправку к $L^{(0)}$ (65,1). С другой стороны, из механики известно, что при небольшом изменении L и \mathcal{H} малые добавки к ним равны по величине и противоположны по знаку (причем изменение L рассматривается при заданных координатах и скоростях, а изменение \mathcal{H} — при заданных координатах и импульсах; см. I § 40).

Поэтому мы можем сразу написать \mathcal{H} , вычтя из

$$\mathcal{H}^{(0)} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

те же второй и четвертый члены из (65,7), предварительно заменив в них скорости на импульсы с помощью соотношений пер-

вого приближения $v_a = p_a/m_a$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} - \\ & - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [p_a p_b + (p_a n_{ab}) (p_b n_{ab})]. \quad (65,8) \end{aligned}$$

Задачи

1. Определить (с точностью до членов второго порядка) центр инерции системы взаимодействующих частиц.

Решение. Наиболее просто задача решается с помощью формулы

$$R = \frac{\sum_a \mathcal{E}_a r_a + \int W r dV}{\sum_a \mathcal{E}_a + \int W dV}$$

(ср. (14,6)), где \mathcal{E}_a — кинетическая энергия частицы (включая ее энергию покоя), а W — плотность энергии создаваемого частицами поля. Поскольку \mathcal{E}_a содержит большие величины $m_a c^2$, то для получения следующего приближения достаточно учесть в \mathcal{E}_a и W лишь члены, не содержащие c , т. е. нерелятивистскую кинетическую энергию частиц и энергию электростатического поля. Имеем:

$$\begin{aligned} \int W r dV &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 r dV = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \Phi)^2 r dV = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left(d\Phi \nabla \frac{\Phi^2}{2} \right) r - \frac{1}{8\pi} \int \nabla \frac{\Phi^2}{2} dV - \frac{1}{8\pi} \int \Phi \Delta \Phi \cdot r dV; \end{aligned}$$

интеграл по бесконечно удаленной поверхности исчезает, второй интеграл также преобразуется в поверхностный и тоже исчезает, а в третьем подставляем $\Delta \Phi = -4\pi\rho$ и получаем:

$$\int W r dV = \frac{1}{2} \int \rho \Phi r dV = \frac{1}{2} \sum_a e_a \Phi_a r_a,$$

где Φ_a — потенциал, создаваемый в точке r_a всеми зарядами, за исключением e_a ¹⁾.

Окончательно находим:

$$R = \frac{1}{\mathcal{E}} \sum_a r_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{e_a}{2} \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} \right)$$

(суммирование по всем b , кроме $b = a$), где

$$\mathcal{E} = \sum_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \right)$$

¹⁾ Исключение собственного поля частиц соответствует упомянутой в примечания на стр. 126 «перенормировке» масс.

— полная энергия системы. Таким образом, в рассматриваемом приближении координаты центра инерции действительно могут быть выражены через величины, относящиеся только к самим частицам.

2. Написать функцию Гамильтона во втором приближении для системы из двух частиц, исключив из нее движение системы как целого.

Решение. Выбираем систему отсчета, в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю. Написав импульсы как производные от действия, имеем:

$$p_1 + p_2 = \frac{\partial S}{\partial r_1} + \frac{\partial S}{\partial r_2} = 0.$$

Отсюда видно, что в рассматриваемой системе отсчета действие является функцией разности $r = r_2 - r_1$ радиус-векторов обеих частиц. Поэтому имеем $p_2 = -p_1 = p$, где $p = \partial S / \partial t$ есть импульс относительного движения частиц.

Функция Гамильтона равна

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \frac{e_1 e_2}{r} - \frac{p^4}{8c^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r} [p^2 + (pn)^2].$$