ГЛАВА IX

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 66. Поле системы зарядов на далеких расстояниях

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на расстояниях, больших по сравнению с ее собственными размерами.

Выберем начало координат O где-либо внутри системы зарядов. Радиус-вектор из O в точку наблюдения поля P обозначим посредством $\mathbf{R}_0$, а единичный вектор в этом направлении — через $\mathbf{n}$. Радиус-вектор элемента заряда $de = \rho\, dV$ пусть будет $\mathbf{r}$, а радиус-вектор от de в точку P обозначим как $\mathbf{R}$; очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$.

На больших расстояниях от системы $R_0 \gg r$ и приближенно имеем:

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| = R_0 - \mathbf{nr}.$$

Подставим это в формулы (62,9—10) для запаздывающих потенциалов. В знаменателе подынтегральных выражений можно пренебречь $\mathbf{rn}$ по сравнению с R_0. В аргументе же $t - R/c$ этого пренебрежения, вообще говоря, сделать нельзя; возможность такого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной R_0/c и $\mathbf{rn}/c$, а тем, насколько меняются сами ρ и $\mathbf{j}$ за время $\mathbf{rn}/c$. Учитывая, что при интегрировании R_0 является постоянной и потому может быть вынесено за знак интеграла, находим для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов следующие выражения:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \rho_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV, \tag{66,1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV. \tag{66,2}$$

На достаточно больших расстояниях от системы поле в малых участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной излучаемых системой электромагнитных волн. Об этой области поля говорят как о *волновой зоне* излучения.

В плоской волне поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны друг с другом соотношением (47,4) $\mathbf{E} = [\mathbf{Hn}]$. Поскольку $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, то для полного

определения поля в волновой зоне достаточно вычислить только векторный потенциал. В плоской волне имеем $\mathbf{H}=[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ (ср. (47,3)), где точка над буквой означает дифференцирование по времени[1]). Таким образом, зная $\mathbf{A}$, найдем $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ по формулам[2]):

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}],\quad \mathbf{E}=\frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{66,3}$$

Отметим, что поле на далеких расстояниях оказывается обратно пропорциональным первой степени расстояния R_0 от излучающей системы. Следует также заметить, что время t входит в выражения (66,1—3) везде в комбинации $t-R_0/c$ с расстоянием R_0.

Для излучения, создаваемого одним произвольно движущимся точечным зарядом, бывает удобно пользоваться потенциалами Лиенара — Вихерта. На далеких расстояниях можно заменить в формуле (63,5) переменный радиус-вектор $\mathbf{R}$ постоянной величиной $\mathbf{R}_0$, а в условии (63,1), определяющем t', надо положить $R=R_0-\mathbf{r}_0\mathbf{n}$ ($\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор заряда). Таким образом[3]),

$$\mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}(t')}{c}\right)}, \tag{66,4}$$

где t' определяется из равенства

$$t'-\frac{1}{c}\mathbf{r}_0(t')\,\mathbf{n}=t-\frac{R_0}{c}. \tag{66,5}$$

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой определенную энергию. Поток энергии дается вектором Пойнтинга, равным в плоской волне

$$\mathbf{S}=c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

Интенсивность dI излучения в элемент телесного угла do определяют как количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент $df=R_0^2\,do$ шаровой поверхности с центром

---

[1]) Эту формулу легко проверить в данном случае также и непосредственным вычислением ротора выражения (66,2), причем члены с $1/R_0^2$ должны быть отброшены по сравнению с членом $\sim 1/R_0$.

[2]) Формула $\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{A}}/c$ (см. (47,3)) здесь неприменима, так как потенциалы φ, $\mathbf{A}$ не удовлетворяют тем дополнительным условиям, которые были наложены на них в § 47.

[3]) В формуле (63,8) для электрического поля рассматриваемому приближению соответствует пренебрежение первым членом по сравнению со вторым.

в начале координат и с радиусом R_0. Это количество равно плотности потока энергии S, помноженной на df, т. е.

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2\,do. \tag{66,6}$$

Поскольку поле H обратно пропорционально R_0, то мы видим, что количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do, одинаково для всех расстояний (при одинаковых для них значениях разности $t - R_0/c$). Так, разумеется, и должно быть, поскольку излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве со скоростью c, нигде не накопляясь и не исчезая.

Выведем формулы для спектрального разложения излучаемых системой волн. Они могут быть получены непосредственно из формул § 64. Подставляя в (64,2) $R = R_0 - \mathbf{rn}$ (причем в знаменателе подынтегрального выражения можно ограничиться подстановкой $R = R_0$), получим для компоненты Фурье векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}}\,dV \tag{66,7}$$

(где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). Компоненты $\mathbf{H}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$ определяются по формулам (66,3). Подставляя в них вместо $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ и сокращая затем на $e^{-i\omega t}$, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = i[\mathbf{kA}_\omega], \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega}[\mathbf{k}[\mathbf{A}_\omega\mathbf{k}]]. \tag{66,8}$$

Говоря о спектральном распределении интенсивности излучения, необходимо различать разложения в интеграл и ряд Фурье. С разложением в интеграл Фурье приходится иметь дело для излучения, сопровождающего столкновения заряженных частиц. При этом представляет интерес полное количество энергии, излученной за время столкновения (и соответственно потерянной сталкивающимися частицами). Пусть $d\mathscr{E}_{\mathrm{n}\omega}$ есть энергия, излученная в элемент телесного угла do в виде волн с частотами в интервале $d\omega$. Согласно общей формуле (49,8) доля полного излучения, приходящаяся на интервал частот $d\omega/2\pi$, получается из обычного выражения для интенсивности заменой квадрата поля на квадрат модуля его компоненты Фурье и одновременным умножением на 2. Поэтому имеем вместо (66,6):

$$d\mathscr{E}_{\mathrm{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2\,do\,\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{66,9}$$

Если заряды совершают периодическое движение, то поле излучения должно быть разложено в ряд Фурье. Согласно общей формуле (49,4) интенсивность отдельной компоненты разложения в ряд Фурье получается из обычного выражения для

интенсивности заменой поля на его компоненту Фурье и одновременным умножением на 2. Таким образом, интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в элемент телесного угла do равна

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 do. \tag{66,10}$$

Наконец, выпишем формулы, определяющие компоненты Фурье поля излучения непосредственно по заданному движению излучающих зарядов. При разложении в интеграл Фурье имеем:

$$\mathbf{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} dt.$$

Подставляя это в (66,7) и переходя затем от непрерывного распределения токов к точечному заряду, движущемуся по траектории $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ (ср. § 64), получим:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_{-\infty}^{\infty} e\mathbf{v}(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]} dt. \tag{66,11}$$

Поскольку $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$, то $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}_0$, и эту формулу можно написать также и в виде контурного интеграла, взятого вдоль траектории заряда:

$$\mathbf{A}_\omega = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} d\mathbf{r}_0. \tag{66,12}$$

Компонента Фурье магнитного поля согласно (66,8) имеет вид

$$\mathbf{H}_\omega = e \frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2 R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n}\, d\mathbf{r}_0]. \tag{66,13}$$

Если заряд совершает периодическое движение по замкнутой траектории, то поле разлагается в ряд Фурье. Компоненты разложения получаются заменой в формулах (66,11—13) интегрирования по всему времени усреднением по периоду T движения (см. определения в § 49). Так, для компоненты Фурье магнитного поля с частотой $\omega = n\omega_0 = 2\pi n/T$ имеем:

$$\mathbf{H}_n = e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \int_0^T e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t))} [\mathbf{n}\mathbf{v}(t)]\, dt =$$

$$= e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n}\, d\mathbf{r}_0]. \tag{66,14}$$

Во втором интеграле интегрирование производится по замкнутой орбите частицы.

Задача

Получить четырехмерное выражение для спектрального разложения излучаемого 4-импульса при движении заряда по заданной траектории.

Решение. Подставив (66,8) в (66,9) и учитывая, что в силу условия Лоренца (62,1) $k\varphi_\omega = \mathbf{k}\mathbf{A}_\omega$, находим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}\left(k^2|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega|^2\right) R_0^2\, do\, \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \frac{c}{2\pi}k^2\left(|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2\right) R_0^2\, do\, \frac{d\omega}{2\pi} = -\frac{c}{2\pi}k^2 A_{i\omega}A_\omega^{i*}R_0^2\, do\, \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Представив 4-потенциал $A_{i\omega}$ в виде, аналогичном (66,12), получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = -\frac{k^2e^2}{4\pi^2}\chi_i\chi^{i*}\, do\, dk,$$

где χ^i обозначает 4-вектор

$$\chi^i = \int \exp\left(-ik_l x^l\right) dx^i,$$

в котором интегрирование производится вдоль мировой линии частицы. Наконец, переходя к четырехмерным обозначениям (в том числе к элементу 4-объема в k-пространстве, ср. (10,1а)), получим для излучаемого 4-импульса следующее выражение:

$$dP^i = -\frac{e^2k^i}{2\pi^2c}\chi_i\chi^i\delta\left(k_m k^m\right) d^4k.$$

§ 67. Дипольное излучение

Временем $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$ в подынтегральных выражениях запаздывающих потенциалов (66,1—2) можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Пусть T означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка T (т. е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее посредством a порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{r}\mathbf{n}/c \sim a/c$. Для того чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Но cT есть не что иное, как длина волны λ излучения. Таким образом, условие $a \ll cT$ можно написать в виде

$$a \ll \lambda, \tag{67,1}$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Заметим, что условие (67,1) можно получить и из (66,7). В подынтегральном выражении $\mathbf{r}$ пробегает значения в интервале порядка размеров системы, так как вне системы $\mathbf{j}$ равно нулю. Поэтому показатель $i\mathbf{k}\mathbf{r}$ мал, и им можно пренебречь для тех волн, у которых $ka \ll 1$, что эквивалентно (67,1).