Задача

Получить четырехмерное выражение для спектрального разложения излучаемого 4-импульса при движении заряда по заданной траектории.

Решение. Подставив (66,8) в (66,9) и учитывая, что в силу условия Лоренца (62,1) $k\varphi_\omega = \mathbf{k}\mathbf{A}_\omega$, находим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}\left(k^2|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega|^2\right) R_0^2\, do\, \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \frac{c}{2\pi}k^2\left(|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2\right) R_0^2\, do\, \frac{d\omega}{2\pi} = -\frac{c}{2\pi}k^2 A_{i\omega}A_\omega^{i*}R_0^2\, do\, \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Представив 4-потенциал $A_{i\omega}$ в виде, аналогичном (66,12), получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = -\frac{k^2e^2}{4\pi^2}\chi_i\chi^{i*}\, do\, dk,$$

где χ^i обозначает 4-вектор

$$\chi^i = \int \exp\left(-ik_l x^l\right) dx^i,$$

в котором интегрирование производится вдоль мировой линии частицы. Наконец, переходя к четырехмерным обозначениям (в том числе к элементу 4-объема в k-пространстве, ср. (10,1а)), получим для излучаемого 4-импульса следующее выражение:

$$dP^i = -\frac{e^2k^i}{2\pi^2c}\chi_i\chi^i\delta\left(k_m k^m\right) d^4k.$$

§ 67. Дипольное излучение

Временем $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$ в подынтегральных выражениях запаздывающих потенциалов (66,1—2) можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Пусть T означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка T (т. е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее посредством a порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{r}\mathbf{n}/c \sim a/c$. Для того чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Но cT есть не что иное, как длина волны λ излучения. Таким образом, условие $a \ll cT$ можно написать в виде

$$a \ll \lambda, \tag{67,1}$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Заметим, что условие (67,1) можно получить и из (66,7). В подынтегральном выражении $\mathbf{r}$ пробегает значения в интервале порядка размеров системы, так как вне системы $\mathbf{j}$ равно нулю. Поэтому показатель $i\mathbf{k}\mathbf{r}$ мал, и им можно пренебречь для тех волн, у которых $ka \ll 1$, что эквивалентно (67,1).

Это условие можно написать еще и в другом виде, заметив, что $T \sim a/v$, так что $\lambda \sim ca/v$, если v есть порядок величины скорости зарядов. Из $a \ll \lambda$ находим тогда:

$$v \ll c, \tag{67,2}$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

Будем предполагать, что это условие выполнено, и займемся изучением излучения на расстояниях от излучающей системы, больших по сравнению с длиной волны (а следовательно, во всяком случае больших по сравнению с размерами системы). Как было указано в § 66, на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, и потому для определения поля достаточно вычислить только векторный потенциал.

Векторный потенциал (66,2) имеет теперь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'}\, dV, \tag{67,3}$$

где время $t' = t - R_0/c$ и уже не зависит от переменных интегрирования. Подставляя $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, переписываем (67,3) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e\mathbf{v} \right),$$

где суммирование производится по всем зарядам системы; для краткости мы будем опускать индекс t' — все величины в правых сторонах равенств берутся в момент времени t'. Но

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}. \tag{67,4}$$

С помощью формул (66,3) находим, что магнитное поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \tag{67,5}$$

а электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{67,6}$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении излучение определяется второй производной от дипольного момента системы. Такое излучение называется *дипольным*.

Поскольку $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом, заряды могут излучать, только если они движутся с ускорением. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Это следует, впрочем, и непосредственно из принципа относительности, так как равно-

мерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды не излучают.

Подставляя (67,5) в (66,6), получим интенсивность дипольного излучения:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2\, do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, do, \tag{67,7}$$

где θ — угол между векторами $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$. Это есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do; отметим, что угловое распределение излучения дается множителем $\sin^2\theta$.

Подставив $do = 2\pi\sin\theta\, d\theta$ и интегрируя по $d\theta$ от 0 до π, получим полное излучение:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{67,8}$$

Если имеется всего один движущийся во внешнем поле заряд, то $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда. Таким образом, полное излучение движущегося заряда

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3}. \tag{67,9}$$

Отметим, что замкнутая система, состоящая из частиц, у которых отношения зарядов к массам одинаковы, не может излучать дипольно. Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \mathrm{const}\sum m\mathbf{r},$$

где const есть одинаковое для всех частиц отношение заряда к массе. Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R}\sum m$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости $v \ll c$, так что применима нерелятивистская механика). Поэтому $\ddot{\mathbf{d}}$ пропорционально ускорению центра инерции, т. е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно.

Наконец, выпишем формулы для спектрального разложения интенсивности дипольного излучения. Для излучения, сопровождающего столкновение, вводим количество $d\mathscr{E}_\omega$ энергии, излученной за все время столкновения в виде волн с частотами в интервале $d\omega/2\pi$ (ср. § 66). Оно получится заменой в (67,8) вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ его компонентой Фурье $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ и одновременным умножением на 2:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4}{3c^3}|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}.$$

По определению компоненты Фурье, имеем:

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

откуда $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$. Таким образом, получаем:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{67,10}$$

При периодическом движении частиц аналогичным образом найдем интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в виде

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2. \tag{67,11}$$

Задачи

1. Определить излучение диполя $\mathbf{d}$, вращающегося в одной плоскости с постоянной угловой скоростью Ω [1]).

Решение. Выбирая плоскость вращения в качестве плоскости xy, имеем:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \qquad p_y = d_0 \sin \Omega t.$$

Ввиду монохроматичности этих функций излучение тоже монохроматично с частотой $\omega = \Omega$. По формуле (67,7) найдем для углового распределения среднего (по периоду вращения) излучения:

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta)\, do,$$

где ϑ — угол между направлением $\mathbf{n}$ излучения и осью z. Полное излучение

$$\bar{I} = \frac{2d_0^2 \Omega^4}{3c^3}.$$

Поляризация излучения определяется направлением вектора $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] = \omega^2 [\mathbf{n}\mathbf{d}]$. Проецируя его на направления в плоскости $\mathbf{n}z$ и перпендикулярно к ней, найдем, что излучение поляризовано по эллипсу с отношением длин полуосей, равным $n_z = \cos \vartheta$; в частности, излучение в направлении оси z поляризовано по кругу.

2. Определить угловое распределение излучения движущейся как целое (со скоростью $\mathbf{v}$) системой зарядов, если известно распределение в системе отсчета, в которой система как целое покоится.

Решение. Пусть

$$dI' = f(\cos \theta', \varphi')\, do', \qquad do' = d(\cos \theta')\, d\varphi'$$

есть интенсивность излучения в системе отсчета K', связанной с движущейся системой зарядов (θ', φ' — углы сферических координат с полярной осью вдоль направления движения системы). Излучаемая в течение времени dt в неподвижной (лабораторной) системе отсчета K энергия $d\mathscr{E}$ связана с излучением энергии $d\mathscr{E}'$ в системе K' формулой преобразования

$$d\mathscr{E}' = \frac{d\mathscr{E} - \mathbf{V}\, d\mathbf{P}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = d\mathscr{E} \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

---

[1]) Сюда относится излучение обладающих дипольным моментом ротатора и симметричного волчка. В первом случае роль $\mathbf{d}$ играет полный дипольный момент ротатора, а во втором случае — проекция дипольного момента волчка на плоскость, перпендикулярную к оси его прецессии (т. е. направлению полного момента вращения).

(импульс излучения, распространяющегося в заданном направлении, связан с его энергией соотношением $|d\mathbf{P}| = d\mathscr{E}/c$). Полярные углы θ, θ' направления излучения в системах K и K' связаны формулами (5,6) (азимуты $\varphi = \varphi'$). Наконец, времени dt' в системе K' соответствует время $dt = dt'/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ в системе K. В результате для интенсивности $dI = (d\mathscr{E}/dt)do$ в системе K найдем:

$$dI = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\theta\right)^3} f\left(\frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta}, \ \varphi\right) do.$$

Так, для диполя, движущегося в направлении своей оси, $f = \text{const}\cdot\sin^2\theta'$, и с помощью полученной формулы находим:

$$dI = \text{const}\,\frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3 \sin^2\theta}{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\theta\right)^5}\, do.$$

§ 68. Дипольное излучение при столкновениях

В задачах об излучении при столкновениях (его называют *тормозным излучением*) редко представляет интерес излучение, сопровождающее столкновение двух частиц, движущихся по определенным траекториям. Обычно приходится рассматривать рассеяние целого пучка параллельно движущихся частиц, и задача состоит в определении полного излучения, отнесенного к единице плотности потока частиц.

Если плотность потока частиц в пучке равна единице (т. е. в единицу времени через единицу площади сечения пучка проходит одна частица), то число частиц в пучке, имеющих «прицельное расстояние» между ρ и $\rho + d\rho$, равно $2\pi\rho\, d\rho$ (площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$). Поэтому искомое полное излучение получится умножением полного излучения $\Delta\mathscr{E}$ одной частицы (с заданным значением прицельного расстояния) на $2\pi\rho\, d\rho$ и интегрированием по $d\rho$ от 0 до ∞. Определенная таким образом величина имеет размерность произведения энергии на площадь. Мы будем называть ее *эффективным излучением* и будем обозначать посредством $\varkappa$ [1]):

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathscr{E}\cdot 2\pi\rho\, d\rho. \qquad (68,1)$$

Аналогичным образом можно определить эффективное излуче-

[1]) Отношение $\varkappa$ к энергии излучающей системы называют сечением потери энергии на излучение.