(импульс излучения, распространяющегося в заданном направлении, связан с его энергией соотношением $|d\mathbf{P}| = d\mathscr{E}/c$). Полярные углы θ, θ' направления излучения в системах K и K' связаны формулами (5,6) (азимуты $\varphi = \varphi'$). Наконец, времени dt' в системе K' соответствует время $dt = dt'/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ в системе K. В результате для интенсивности $dI = (d\mathscr{E}/dt)do$ в системе K найдем:

$$dI = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\theta\right)^3} f\left(\frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta}, \ \varphi\right) do.$$

Так, для диполя, движущегося в направлении своей оси, $f = \text{const}\cdot\sin^2\theta'$, и с помощью полученной формулы находим:

$$dI = \text{const}\,\frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3 \sin^2\theta}{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\theta\right)^5}\, do.$$

§ 68. Дипольное излучение при столкновениях

В задачах об излучении при столкновениях (его называют *тормозным излучением*) редко представляет интерес излучение, сопровождающее столкновение двух частиц, движущихся по определенным траекториям. Обычно приходится рассматривать рассеяние целого пучка параллельно движущихся частиц, и задача состоит в определении полного излучения, отнесенного к единице плотности потока частиц.

Если плотность потока частиц в пучке равна единице (т. е. в единицу времени через единицу площади сечения пучка проходит одна частица), то число частиц в пучке, имеющих «прицельное расстояние» между ρ и $\rho + d\rho$, равно $2\pi\rho\, d\rho$ (площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$). Поэтому искомое полное излучение получится умножением полного излучения $\Delta\mathscr{E}$ одной частицы (с заданным значением прицельного расстояния) на $2\pi\rho\, d\rho$ и интегрированием по $d\rho$ от 0 до ∞. Определенная таким образом величина имеет размерность произведения энергии на площадь. Мы будем называть ее *эффективным излучением* и будем обозначать посредством $\varkappa$ [1]):

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathscr{E}\cdot 2\pi\rho\, d\rho. \qquad (68,1)$$

Аналогичным образом можно определить эффективное излуче-

[1]) Отношение $\varkappa$ к энергии излучающей системы называют сечением потери энергии на излучение.

ние в определенный элемент do телесного угла, в определенном интервале $d\omega$ частот и т. п.[1]).

Выведем общую формулу, определяющую угловое распределение излучения при рассеянии пучка частиц в центрально-симметричном поле, предполагая излучение дипольным.

Интенсивность излучения (в каждый момент времени) отдельной частицей определяется формулой (67,7), в которой $\mathbf{d}$ есть дипольный момент частицы относительно рассеивающего центра[2]). Прежде всего усредняем это выражение по всем направлениям вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ в плоскости поперечного сечения пучка. Поскольку $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$, то усреднению подлежит лишь величина $(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$. В силу центральной симметрии рассеивающего поля и параллельности падающего пучка частиц рассеяние (а вместе с ним и излучение) обладает аксиальной симметрией относительно оси, проходящей через центр. Выберем эту ось в качестве оси x. Из соображений симметрии очевидно, что первые степени $\ddot{d}_y$, $\ddot{d}_z$ при усреднении дают нуль, а поскольку $\ddot{d}_x$ усреднением не затрагивается, то

$$\overline{\ddot{d}_x\ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x\ddot{d}_z} = 0.$$

Средние же значения от $\ddot{d}_y^2$ и $\ddot{d}_z^2$ равны друг другу, так что

$$\overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2\right).$$

Имея все это в виду, без труда найдем:

$$\overline{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2\right) + \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2\right)\cos^2\theta,$$

где θ — угол между направлением $\mathbf{n}$ излучения и осью x.

Интегрируя интенсивность по времени и по всем прицельным расстояниям, получим следующее окончательное выражение, определяющее эффективное излучение в зависимости от направления:

$$d\varkappa_{\mathrm{n}} = \frac{do}{4\pi c^3}\left(A + B\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right), \tag{68,2}$$

где

$$A = \frac{2}{3}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \ddot{\mathbf{d}}^2\, dt\, 2\pi\, d\rho, \qquad B = \frac{1}{3}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2\right) dt\, 2\pi\rho\, d\rho. \tag{68,3}$$

---

[1]) Если интегрируемое выражение зависит от угла, под которым расположена проекция дипольного момента частицы в плоскости поперечного сечения потока, то оно должно быть предварительно усреднено по всем направлениям в этой плоскости и лишь затем умножено на $2\pi\rho\, d\rho$ и проинтегрировано.

[2]) Фактически обычно речь идет о дипольном моменте двух частиц — рассеиваемой и рассеивающей — относительно их общего центра инерции.

Второй член в (68,2) написан в таком виде, чтобы давать нуль при усреднении по всем направлениям, так что полное эффективное излучение $\varkappa = A/c^3$. Обратим внимание на то, что угловое распределение излучения симметрично относительно плоскости, проходящей через рассеивающий центр перпендикулярно к пучку — выражение (68,2) не меняется при замене θ на $\pi - \theta$. Это свойство специфично для дипольного излучения и теряется при переходе к более высоким приближениям по v/c.

Интенсивность тормозного излучения можно разделить на две части: интенсивность излучения, поляризованного в плоскости испускания, проходящей через ось x и направление $\mathbf{n}$ (назовем ее плоскостью xy), и интенсивность излучения, поляризованного в перпендикулярной плоскости xz.

Вектор электрического поля имеет направление вектора

$$[\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}]] = \mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

(см. (67,6)). Компонента этого вектора в направлении, перпендикулярном к плоскости xy, есть $-\ddot{d}_z$, а проекция на плоскость xy равна $|\sin\theta\cdot\ddot{d}_x - \cos\theta\cdot\ddot{d}_y|$ (последнюю удобнее определить по равной ей z-компоненте магнитного поля, имеющего направление $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]$).

Возводя $\mathbf{E}$ в квадрат и усредняя по всем направлениям вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ в плоскости yz, мы прежде всего видим, что произведение проекций поля на плоскость xy и перпендикулярно к ней обращается в нуль. Это значит, что интенсивность действительно может быть представлена в виде суммы двух независимых частей: интенсивностей излучения, поляризованного в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Интенсивность излучения с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости xy, определяется средним квадратом от $\ddot{d}_z^2 = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)$. Для соответствующей части эффективного излучения получим выражение

$$d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\perp} = \frac{d\sigma}{4\pi c^3}\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)\,dt\,2\pi\rho\,d\rho. \qquad (68,4)$$

Отметим, что эта часть излучения оказывается изотропной по направлениям. Выписывать выражение для эффективного излучения с направлением электрического поля в плоскости xy нет необходимости, так как очевидно, что

$$d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\perp} + d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\parallel} = d\varkappa_{\mathbf{n}}.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для углового распределения эффективного излучения в определенном

интервале частот:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}\omega} = \frac{do}{2\pi c^3}\left[A(\omega) + B(\omega)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right]\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad (68,5)$$

где

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3}\int_0^\infty \mathbf{d}_\omega^2 2\pi\rho\, d\rho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3}\int_0^\infty \left(\mathbf{d}_\omega^2 - 3d_{x\omega}^2\right) 2\pi\rho\, d\rho. \qquad (68,6)$$

§ 69. Тормозное излучение малых частот

Рассмотрим низкочастотный «хвост» спектрального распределения тормозного излучения: область частот, малых по сравнению с той частотой (обозначим ее ω_0), в области которой сосредоточена основная часть излучения:

$$\omega \ll \omega_0. \qquad (69,1)$$

При этом мы не будем предполагать скорости сталкивающихся частиц малыми по сравнению со скоростью света, как это делалось в предыдущем параграфе; следующие ниже формулы справедливы при произвольных скоростях. В нерелятивистском случае $\omega_0 \sim 1/\tau$, где τ — порядок величины продолжительности столкновения; в ультрарелятивистском случае ω_0 пропорциональна квадрату энергии излучающей частицы (см. ниже § 77).

В интеграле

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t}\, dt$$

поле излучения $\mathbf{H}$ заметно отлично от нуля только в течение промежутка времени порядка $1/\omega_0$. Поэтому при соблюдении условия (69,1) мы можем считать, что под интегралом $\omega t \ll 1$, так что можно заменить $e^{i\omega t}$ единицей; тогда

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}\, dt.$$

Подставляя сюда $\mathbf{H} = [\ddot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ и производя интегрирование по времени, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{n}], \qquad (69,2)$$

где $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ — изменение векторного потенциала поля, создаваемого сталкивающимися частицами, за время столкновения.

Полное излучение (с частотой ω) за время столкновения получится подстановкой (69,2) в (66,9):

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{R_0^2}{4c\pi^2}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{n}]^2\, do\, d\omega. \qquad (69,3)$$