интервале частот:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}\omega} = \frac{do}{2\pi c^3}\left[A(\omega) + B(\omega)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right]\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad (68,5)$$

где

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3}\int_0^\infty \mathbf{d}_\omega^2 2\pi\rho\, d\rho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3}\int_0^\infty \left(\mathbf{d}_\omega^2 - 3d_{x\omega}^2\right) 2\pi\rho\, d\rho. \qquad (68,6)$$

§ 69. Тормозное излучение малых частот

Рассмотрим низкочастотный «хвост» спектрального распределения тормозного излучения: область частот, малых по сравнению с той частотой (обозначим ее ω_0), в области которой сосредоточена основная часть излучения:

$$\omega \ll \omega_0. \qquad (69,1)$$

При этом мы не будем предполагать скорости сталкивающихся частиц малыми по сравнению со скоростью света, как это делалось в предыдущем параграфе; следующие ниже формулы справедливы при произвольных скоростях. В нерелятивистском случае $\omega_0 \sim 1/\tau$, где τ — порядок величины продолжительности столкновения; в ультрарелятивистском случае ω_0 пропорциональна квадрату энергии излучающей частицы (см. ниже § 77).

В интеграле

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t}\, dt$$

поле излучения $\mathbf{H}$ заметно отлично от нуля только в течение промежутка времени порядка $1/\omega_0$. Поэтому при соблюдении условия (69,1) мы можем считать, что под интегралом $\omega t \ll 1$, так что можно заменить $e^{i\omega t}$ единицей; тогда

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}\, dt.$$

Подставляя сюда $\mathbf{H} = [\ddot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ и производя интегрирование по времени, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{n}], \qquad (69,2)$$

где $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ — изменение векторного потенциала поля, создаваемого сталкивающимися частицами, за время столкновения.

Полное излучение (с частотой ω) за время столкновения получится подстановкой (69,2) в (66,9):

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{R_0^2}{4c\pi^2}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{n}]^2\, do\, d\omega. \qquad (69,3)$$

Для векторного потенциала можно воспользоваться его выражением в форме Лиенара — Вихерта (66,4), и мы получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=\frac{1}{4\pi^2c^3}\left\{\sum e\left(\frac{[\mathbf{v}_2\mathbf{n}]}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}_2}-\frac{[\mathbf{v}_1\mathbf{n}]}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}_1}\right)\right\}^2 do\,d\omega, \quad (69,4)$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частицы до и после рассеяния, а сумма берется по обеим сталкивающимся частицам. Обратим внимание на то, что коэффициент при $d\omega$ оказывается не зависящим от частоты. Другими словами, при малых частотах (условие (69,1)) спектральное распределение излучения не зависит от частоты, т. е. $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}/d\omega$ стремится к постоянному пределу при $\omega\to 0$ [1]).

Если скорости сталкивающихся частиц малы по сравнению со скоростью света, то (69,4) переходит в

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=\frac{1}{4\pi^2c^3}\left(\sum e\,[\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\ \mathbf{n}]\right)^2 do\,d\omega. \quad (69,5)$$

Это выражение соответствует дипольному излучению, векторный потенциал которого дается формулой (67,4).

Интересный случай применения полученных формул представляет излучение, возникающее при испускании новой заряженной частицы (например, при вылете β-частицы из ядра). При этом процесс надо рассматривать как мгновенное изменение скорости частицы — от нуля до ее заданного значения (ввиду симметрии формулы (69,5) по отношению к перестановке $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ возникающее в этом процессе излучение совпадает с излучением, которое сопровождало бы обратный процесс — мгновенную остановку частицы). Существенно, что поскольку «время» данного процесса $\tau\to 0$, то условию (69,1) фактически удовлетворяют все вообще частоты [2]).

Задача

Определить спектральное распределение полного излучения, возникающего при испускании заряженной частицы, движущейся со скоростью v.

Решение. Согласно формуле (69,4) (в которой полагаем $\mathbf{v}_2=\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1=0$), имеем:

$$d\mathscr{E}_\omega=d\omega\frac{e^2v^2}{4\pi^2c^3}\int\limits_0^\pi\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}\,2\pi\sin\theta\,d\theta.$$

---

[1]) Интегрируя по предельным расстояниям, можно получить аналогичный результат для эффективного излучения при рассеянии пучка частиц. Надо, однако, иметь в виду, что этот результат несправедлив для эффективного излучения при кулоновом взаимодействии сталкивающихся частиц в связи с тем, что интеграл по $d\rho$ оказывается расходящимся (логарифмически) при больших ρ. Мы увидим в следующем параграфе, что в этом случае эффективное излучение при малых частотах зависит логарифмически от частоты, а не остается постоянным.

[2]) Применимость формул, однако, ограничена квантовым условием малости $\hbar\omega$ по сравнению с полной кинетической энергией частицы.

Вычисление интеграла приводит к результату [1]):

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v} - 2\right)d\omega. \tag{1}$$

При $v \ll c$ эта формула переходит в

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2v^2}{3\pi c^3}d\omega,$$

что можно получить и непосредственно из (69,5).

§ 70. Излучение при кулоновом взаимодействии

В этом параграфе мы выведем для справочных целей ряд формул, относящихся к дипольному излучению системы из двух заряженных частиц; предполагается, что скорости частиц малы по сравнению со скоростью света.

Равномерное движение системы как целого (т. е. движение ее центра инерции) не представляет интереса, так как не приводит к излучению; поэтому мы должны рассматривать только относительное движение частиц. Выберем начало координат в центре инерции. Тогда дипольный момент системы $\mathbf{d} = e_1\mathbf{r}_1 + e_2\mathbf{r}_2$ напишется в виде

$$\mathbf{d} = \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mathbf{r}, \tag{70,1}$$

где индексы 1 и 2 относятся к обеим частицам, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ есть радиус-вектор между ними, а $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса.

Начнем с излучения, сопровождающего эллиптическое движение двух притягивающихся по закону Кулона частиц. Как известно из механики (см. I § 15), это движение может быть описано как движение частицы с массой μ по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах имеет вид

$$1 + \varepsilon\cos\varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}, \tag{70,2}$$

где большая полуось a и эксцентриситет ε равны

$$a = \frac{\alpha}{2|\mathscr{E}|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{70,3}$$

Здесь $\mathscr{E}$ есть полная энергия частиц (без энергии покоя!), отрицательная при финитном движении; $M = \mu r^2\dot{\varphi}$ — момент ко-

[1]) Хотя условие (69,1) ввиду «мгновенности» процесса выполняется, как уже было указано, для всех частот, но получить полное излучение энергии путем интегрирования выражения (1) по $d\omega$ нельзя, — интеграл расходится при больших частотах. Помимо нарушения условия классичности при больших частотах, в данном случае причина расходимости лежит и в некорректности самой постановки классической задачи, в которой частица имеет в начальный момент бесконечное ускорение.