Вычисление интеграла приводит к результату [1]):

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v} - 2\right)d\omega. \tag{1}$$

При $v \ll c$ эта формула переходит в

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2v^2}{3\pi c^3}d\omega,$$

что можно получить и непосредственно из (69,5).

§ 70. Излучение при кулоновом взаимодействии

В этом параграфе мы выведем для справочных целей ряд формул, относящихся к дипольному излучению системы из двух заряженных частиц; предполагается, что скорости частиц малы по сравнению со скоростью света.

Равномерное движение системы как целого (т. е. движение ее центра инерции) не представляет интереса, так как не приводит к излучению; поэтому мы должны рассматривать только относительное движение частиц. Выберем начало координат в центре инерции. Тогда дипольный момент системы $\mathbf{d} = e_1\mathbf{r}_1 + e_2\mathbf{r}_2$ напишется в виде

$$\mathbf{d} = \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mathbf{r}, \tag{70,1}$$

где индексы 1 и 2 относятся к обеим частицам, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ есть радиус-вектор между ними, а $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса.

Начнем с излучения, сопровождающего эллиптическое движение двух притягивающихся по закону Кулона частиц. Как известно из механики (см. I § 15), это движение может быть описано как движение частицы с массой μ по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах имеет вид

$$1 + \varepsilon\cos\varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}, \tag{70,2}$$

где большая полуось a и эксцентриситет ε равны

$$a = \frac{\alpha}{2|\mathscr{E}|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{70,3}$$

Здесь $\mathscr{E}$ есть полная энергия частиц (без энергии покоя!), отрицательная при финитном движении; $M = \mu r^2\dot{\varphi}$ — момент ко-

[1]) Хотя условие (69,1) ввиду «мгновенности» процесса выполняется, как уже было указано, для всех частот, но получить полное излучение энергии путем интегрирования выражения (1) по $d\omega$ нельзя, — интеграл расходится при больших частотах. Помимо нарушения условия классичности при больших частотах, в данном случае причина расходимости лежит и в некорректности самой постановки классической задачи, в которой частица имеет в начальный момент бесконечное ускорение.

личества движения; α — постоянная закона Кулона:

$$\alpha = |e_1 e_2|.$$

Зависимость координат от времени может быть записана в виде параметрических уравнений

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\xi - \varepsilon \sin \xi). \qquad (70,4)$$

Одному полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра ξ от нуля до 2π; период движения равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

Определим компоненты Фурье дипольного момента. Ввиду периодичности движения речь идет о разложении в ряд Фурье. Поскольку дипольный момент пропорционален радиус-вектору $\mathbf{r}$, то задача сводится к вычислению компонент Фурье от координат $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$. Зависимость x и y от времени определяется параметрическими уравнениями

$$x = a(\cos\xi - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi, \quad \omega_0 t = \xi - \varepsilon\sin\xi. \quad (70,5)$$

Здесь введена частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}} = \frac{(2|\mathscr{E}|)^{3/2}}{\alpha\mu^{1/2}}.$$

Вместо компонент Фурье от координат удобнее вычислять компоненты Фурье от скоростей, воспользовавшись тем, что $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$, $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$. Имеем:

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_n n T}\int_0^T e^{i\omega_0 n t}\dot{x}\,dt.$$

Но $\dot{x}\,dt = dx = -a\sin\xi\,d\xi$; переходя от интегрирования по dt к интегрированию по $d\xi$, имеем, таким образом:

$$x_n = -\frac{ia}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon\sin\xi)}\sin\xi\,d\xi.$$

Аналогичным образом находим:

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\cos\xi\,d\xi = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n\varepsilon}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\,d\xi$$

(при переходе от первого интеграла ко второму в подынтегральном выражении пишем $\cos\xi \equiv \left(\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}$; тогда интеграл от первого члена берется и притом тождественно обращается в

нуль). Наконец, воспользуемся известной формулой теории функций Бесселя

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x\sin\xi)}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\xi - x\sin\xi)\,d\xi = J_n(x), \quad (70,6)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя целочисленного порядка n. В результате окончательно получаем следующие выражения для искомых компонент Фурье:

$$x_n = \frac{a}{n}J_n'(n\varepsilon), \quad y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon}J_n(n\varepsilon) \quad (70,7)$$

(штрих у функции Бесселя обозначает дифференцирование по ее аргументу).

Выражение для интенсивности монохроматических компонент излучения получается подстановкой x_n и y_n в формулу

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}\mu^2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

(см. (67,11)). Выразив при этом a и ω_0 через характеристики частиц, получим окончательно:

$$I_n = \frac{64n^2\mathscr{E}^4}{3c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\left[J_n'^2(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}J_n^2(n\varepsilon)\right]. \quad (70,8)$$

Выпишем, в частности, асимптотическую формулу для интенсивности очень высоких гармоник (большие n) при движении по близкой к параболе орбите (ε близко к 1). Для этого используем асимптотическую формулу

$$J_n(n\varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{n}\right)^{1/3}\Phi\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right], \quad (70,9)$$

$$n \gg 1, \quad 1-\varepsilon \ll 1,$$

где Φ — функция Эйри (определенная в примечании на стр. 201)[1]). Подстановка в (70,8) дает:

$$I_n = \frac{64\cdot 2^{2/3}}{3\pi}\frac{n^{1/3}\mathscr{E}^4}{c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{(1-\varepsilon^2)\Phi^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3}\Phi'^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right]\right\}. \quad (70,10)$$

---

[1]) При $n \gg 1$ в интеграле

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[n(\xi - \varepsilon\sin\xi)]\,d\xi$$

основную роль играют малые ξ (при не малых ξ подынтегральное выражение быстро осциллирует). Соответственно этому разлагаем аргумент коси-

Этот результат может быть выражен также и через функции Макдональда K_ν:

$$I_n = \frac{64}{9\pi^2}\frac{n^2\mathscr{E}^4}{c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{K^2_{1/3}\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right]+\right.$$
$$\left.+K^2_{2/3}\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right]\right\}(1-\varepsilon^2)^2$$

(нужные для этого формулы приведены в примечаниях на стр. 201, 265).

Рассмотрим далее столкновение двух притягивающихся заряженных частиц. Их относительное движение описывается как движение частиц с массой μ по гиперболе

$$1+\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}, \tag{70,11}$$

где

$$a=\frac{\alpha}{2\mathscr{E}}, \qquad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{\mu\alpha^2}} \tag{70,12}$$

(теперь $\mathscr{E}>0$). Зависимость r от времени определяется параметрическими уравнениями

$$r=a(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\xi-1), \qquad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\xi-\xi), \tag{70,13}$$

где параметр ξ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Для координат x, y имеем:

$$x=a(\varepsilon-\mathrm{ch}\,\xi), \qquad y=a\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi. \tag{70,14}$$

Вычисление компонент Фурье (речь идет теперь о разложении в интеграл Фурье) производится в точности аналогично предыдущему случаю. В результате получаем:

$$x_\omega=\frac{\pi a}{\omega}H^{(1)\prime}_{i\nu}(i\nu\varepsilon), \qquad y_\omega=-\frac{\pi a\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\omega\varepsilon}H^{(1)}_{i\nu}(i\nu\varepsilon), \tag{70,15}$$

где $H^{(1)}_{i\nu}$ — функция Ганкеля 1-го рода ранга $i\nu$ и введено обозначение

$$\nu=\frac{\omega}{\sqrt{\alpha/\mu a^3}}=\frac{\alpha\omega}{\mu v_0^3} \tag{70,16}$$

нуса по степеням ξ:

$$J_n(n\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\cos\left[n\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2}\xi+\frac{\xi^3}{6}\right)\right]d\xi;$$

с учетом быстрой сходимости интеграла, верхний предел заменен на ∞; член с ξ^3 должен быть сохранен ввиду наличия в члене первого порядка малого коэффициента $1-\varepsilon\approx(1-\varepsilon^2)/2$. Полученный интеграл очевидной подстановкой приводится к виду (70,9).

(v_0 — относительная скорость частиц на бесконечности; энергия $\mathscr{E} = \mu v_0^2/2$). При вычислении использована известная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\xi - ix\,\mathrm{sh}\,\xi}\, d\xi = i\pi H_p^{(1)}(ix). \tag{70,17}$$

Подставляя (70,15) в формулу

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4\omega^4\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (|x_\omega|^2 + |y_\omega|^2)\frac{d\omega}{2\pi}$$

(см. (67,10)), получим [1]):

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{\pi\mu^2\alpha^2\omega^2}{6c^3\mathscr{E}^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left\{[H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\varepsilon)]^2 - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]^2\right\} d\omega. \tag{70,18}$$

Большой интерес представляет «эффективное излучение» при рассеянии пучка параллельно движущихся частиц (см. § 68). Для его вычисления умножаем $d\mathscr{E}_\omega$ на $2\pi\rho\, d\rho$ и интегрируем по всем ρ от нуля до бесконечности. Интегрирование по $d\rho$ заменяем интегрированием по $d\varepsilon$ (в пределах от 1 до ∞), воспользовавшись тем, что $2\pi\rho\, d\rho = 2\pi a^2\varepsilon\, d\varepsilon$; это соотношение получается из определений (70,12), в которых момент M и энергия $\mathscr{E}$ связаны с прицельным расстоянием ρ и скоростью v_0 посредством

$$M = \mu\rho v_0, \qquad \mathscr{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}.$$

Получающийся интеграл берется с помощью формулы

$$z\left[Z_p'^2 + \left(\frac{p^2}{z^2} - 1\right) Z_p^2\right] = \frac{d}{dz}(zZ_pZ_p'),$$

где $Z_p(z)$ — любое решение уравнения Бесселя порядка p [2]). Имея в виду, что при $\varepsilon \to \infty$ функция Ганкеля $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ обращается в нуль, получим в результате следующую формулу:

$$d\varkappa_\omega = \frac{4\pi^2\alpha^3\omega}{3c^3\mu v_0^5}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 |H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)|\, H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu)\, d\omega. \tag{70,19}$$

Рассмотрим особо предельные случаи малых и больших частот. В интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\xi - \mathrm{sh}\,\xi)}\, d\xi = i\pi H_{i\nu}(i\nu), \tag{70,20}$$

---

[1]) Напомним, что функция $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ чисто мнима, а ее производная $H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\varepsilon)$ вещественна.

[2]) Эта формула является непосредственным следствием уравнения Бесселя

$$Z'' + \frac{1}{z}Z' + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) Z = 0.$$

определяющем функцию Ганкеля, существенна только та область значений переменной интегрирования ξ, в которой экспонента имеет порядок величины единицы. При малых частотах ($\nu \ll 1$) существенна поэтому область больших ξ. Но при больших ξ имеем $\operatorname{sh}\xi \gg \xi$. Таким образом, приближенно

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu \operatorname{sh}\xi}\, d\xi = H_0^{(1)}(i\nu).$$

Аналогичным образом найдем, что

$$H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu) \approx H_0^{(1)\prime}(i\nu).$$

Воспользовавшись, наконец, известным из теории функций Бесселя приближенным выражением (при малых x)

$$iH_0^{(1)}(ix) \approx \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma = e^C$, где C — постоянная Эйлера; $\gamma = 1{,}781\ldots$), получим следующее выражение для эффективного излучения при малых частотах:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\alpha^2}{3v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ln\left(\frac{2\mu v_0^3}{\gamma\omega\alpha}\right) d\omega \quad \text{при} \quad \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \qquad (70{,}21)$$

Оно зависит от частоты логарифмически.

При больших частотах ($\nu \gg 1$) в интеграле (70,20) существенны, напротив, малые ξ. Соответственно этому разлагаем экспоненту подынтегрального выражения по степеням ξ и имеем приближенно:

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\nu}{6}\xi^3\right) d\xi =$$

$$= -\frac{2i}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{i\nu}{6}\xi^3\right) d\xi\right\}.$$

Этот интеграл подстановкой $i\nu\xi^3/6 = \eta$ приводится к Г-функции, и в результате получается

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Аналогичным образом найдем:

$$H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Наконец, воспользовавшись известной формулой теории Г-функций

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x},$$

получим для эффективного излучения при больших частотах:

$$d\varkappa_\omega=\frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega \quad \text{при} \quad \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}, \tag{70,22}$$

т. е. выражение, не зависящее от частоты.

Перейдем теперь к тормозному излучению при столкновении двух отталкивающихся по закону $U=\alpha/r$ $(\alpha>0)$ частиц. Движение происходит по гиперболе

$$-1+\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}; \tag{70,23}$$

$$x=a(\varepsilon+\operatorname{ch}\xi), \qquad y=a\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{sh}\xi, \quad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon\operatorname{sh}\xi+\xi) \tag{70,24}$$

(a и ε — из (70,12)). Все вычисления для этого случая непосредственно приводятся к произведенным выше, так что нет необходимости производить их заново. Действительно, интеграл

$$x_\omega=\frac{ia}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon\operatorname{sh}\xi+\xi)}\operatorname{sh}\xi\, d\xi$$

для компоненты Фурье координаты x подстановкой $\xi\to i\pi-\xi$ приводится к такому же интегралу для случая притяжения, умноженному на $-e^{-\pi\nu}$; то же самое имеет место для y_ω.

Таким образом, выражения для компонент Фурье x_ω, y_ω в случае отталкивания отличаются от соответствующих выражений для случая притяжения множителями $e^{-\pi\nu}$. В формулах же для излучения появятся, следовательно, лишние множители $e^{-2\pi\nu}$. В частности, для малых частот получается прежняя формула (70,21) (так как при $\nu\ll 1: e^{-2\pi\nu}\approx 1$). Для больших частот эффективное излучение имеет вид

$$d\varkappa_\omega=\frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\exp\left(-\frac{2\pi\omega\alpha}{\mu v_0^3}\right)d\omega \quad \text{при} \quad \omega\gg\frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \tag{70,25}$$

Оно убывает экспоненциально с увеличением частоты.

Задачи

1. Определить полную среднюю интенсивность излучения при эллиптическом движении двух притягивающихся зарядов.

Решение. С выражением (70,1) для дипольного момента имеем для полной интенсивности излучения:

$$I=\frac{2\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\ddot{\mathbf{r}}^2=\frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{1}{r^4},$$

причем мы воспользовались уравнением движения $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$. Координату r выражаем через φ согласно уравнению орбиты (70,2), а интегрирование по времени с помощью равенства $dt = \mu r^2 d\varphi/M$ заменяем интегрированием по углу φ (от 0 до 2π). В результате находим для средней интенсивности:

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt = \frac{2^{3/2}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{5/2}\alpha^3\,|\mathscr{E}|^{3/2}}{M^5}\left(3 - \frac{2\,|\mathscr{E}|\,M^2}{\mu\alpha^2}\right).$$

2. Определить полное излучение $\Delta\mathscr{E}$ при столкновении двух заряженных частиц.

Решение. В случае притяжения траекторией является гипербола (70,11), а в случае отталкивания — (70,23). Асимптоты гиперболы образуют с ее осью угол φ_0, определяемый из $\pm\cos\varphi_0 = 1/\varepsilon$, а угол отклонения частиц (в системе координат, в которой центр инерции покоится) есть $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$. Вычисление производится так же, как в задаче 1 (интеграл по $d\varphi$ берется в пределах между $-\varphi_0$ и φ_0). В результате находим в случае притяжения:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3\alpha}\operatorname{tg}^3\frac{\chi}{2}\left[(\pi+\chi)\left(1 + 3\operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}\right) + 6\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right]\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2,$$

в случае отталкивания:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3\alpha}\operatorname{tg}^3\frac{\chi}{2}\left[(\pi-\chi)\left(1 + 3\operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}\right) - 6\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right]\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

В обоих случаях под χ понимается положительный угол, определяемый из соотношения

$$\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \rho}{\alpha}.$$

При лобовом столкновении отталкивающихся зарядов переход к пределу $\rho \to 0$, $\chi \to \pi$ дает:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3\alpha}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

3. Определить полное эффективное излучение при рассеянии потока частиц в кулоновом поле отталкивания.

Решение. Искомая величина есть

$$\varkappa = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty I\,dt\cdot 2\pi\rho\,d\rho = \frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 2\pi\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^4}\,dt\cdot\rho\,d\rho.$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr вдоль траектории заряда, написав $dt = dr/v_r$, где радиальная скорость $v_r = \dot{r}$ выражается через r по формуле

$$v_r = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\mathscr{E} - \frac{M^2}{2\mu r^2} - U(r)\right]} = \sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{\mu r}}.$$

Интегрирование по dr производится в пределах от бесконечности до ближайшего к центру расстояния $r_0 = r_0(\rho)$ (точка, в которой $v_r = 0$), и затем от r_0 снова к бесконечности; это сводится к удвоенному интегралу от r_0

до ∞. Вычисление двойного интеграла удобно производить, переменив порядок интегрирования — сначала до $d\rho$, а затем по dr. В результате получим:

$$\varkappa = \frac{8\pi}{9}\frac{\alpha\mu v_0}{c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

4. Определить угловое распределение полного излучения при пролете одного заряда мимо другого, если скорость настолько велика (хотя и мала по сравнению со скоростью света), что отклонение от прямолинейности движения можно считать малым.

Решение. Угол отклонения мал, если кинетическая энергия $\mu v^2/2$ велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть α/ρ ($\mu v^2 \gg \alpha/\rho$). Выберем плоскость движения в качестве плоскости xy с началом координат в центре инерции и с осью x вдоль направления скорости. В первом приближении траектория есть прямая $x = vt$, $y = \rho$. В следующем приближении уравнения движения дают:

$$\mu\ddot{x} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{x}{r} \approx \frac{\alpha v t}{r^3}, \qquad \mu\ddot{y} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{y}{r} \approx \frac{\alpha\rho}{r^3},$$

причем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \sqrt{\rho^2 + v^2t^2}.$$

С помощью формулы (67,7) имеем:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = do\,\frac{\mu^2}{4\pi c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - (\ddot{x}n_x + \ddot{y}n_y)^2]\,dt,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении do. Выражая подынтегральное выражение через t и производя интегрирование, получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{\alpha^2}{32vc^3\rho^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left(4 - n_x^2 - 3n_y^2\right) do.$$

§ 71. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучения

Рассмотрим теперь излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала по степеням отношения a/λ размеров системы к длине волны, по-прежнему предполагающегося малым. Хотя эти члены, вообще говоря, малы по сравнению с первым (дипольным), они существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы равен нулю, так что дипольное излучение вообще отсутствует.

Разлагая в (66,2)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\mathbf{rn}/c}\,dV$$

подынтегральное выражение по степеням $\mathbf{rn}/c$ и сохраняя теперь два первых члена, находим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}dV + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{rn})\,\mathbf{j}_{t'}\,dV.$$