до $\infty$. Вычисление двойного интеграла удобно производить, переменив порядок интегрирования — сначала до $d\rho$, а затем по $dr$. В результате получим:

$$\varkappa = \frac{8\pi}{9}\frac{\alpha\mu v_0}{c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

4. Определить угловое распределение полного излучения при пролете одного заряда мимо другого, если скорость настолько велика (хотя и мала по сравнению со скоростью света), что отклонение от прямолинейности движения можно считать малым.

Решение. Угол отклонения мал, если кинетическая энергия $\mu v^2/2$ велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть $\alpha/\rho$ ($\mu v^2 \gg \alpha/\rho$). Выберем плоскость движения в качестве плоскости $xy$ с началом координат в центре инерции и с осью $x$ вдоль направления скорости. В первом приближении траектория есть прямая $x = vt$, $y = \rho$. В следующем приближении уравнения движения дают:

$$\mu\ddot{x} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{x}{r} \approx \frac{\alpha v t}{r^3}, \qquad \mu\ddot{y} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{y}{r} \approx \frac{\alpha\rho}{r^3},$$

причем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \sqrt{\rho^2 + v^2t^2}.$$

С помощью формулы (67,7) имеем:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = do\,\frac{\mu^2}{4\pi c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - (\ddot{x}n_x + \ddot{y}n_y)^2]\,dt,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $do$. Выражая подынтегральное выражение через $t$ и производя интегрирование, получим:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{\alpha^2}{32vc^3\rho^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left(4 - n_x^2 - 3n_y^2\right) do.$$

## § 71. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучения

Рассмотрим теперь излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала по степеням отношения $a/\lambda$ размеров системы к длине волны, по-прежнему предполагающегося малым. Хотя эти члены, вообще говоря, малы по сравнению с первым (дипольным), они существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы равен нулю, так что дипольное излучение вообще отсутствует.

Разлагая в (66,2)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\mathbf{rn}/c}\,dV$$

подынтегральное выражение по степеням $\mathbf{rn}/c$ и сохраняя теперь два первых члена, находим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}dV + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{rn})\,\mathbf{j}_{t'}\,dV.$$

Подставляя сюда $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$ и переходя к точечным зарядам, получим:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\sum e\mathbf{v}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\mathbf{v}(\mathbf{rn}). \tag{71,1}$$

Здесь и ниже (как и в § 67) мы для краткости опускаем индекс $t'$ у всех величин в правой стороне равенства.

Во втором слагаемом пишем:

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{nr})-\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{nv})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\mathbf{n}].$$

Мы находим тогда для $\mathbf{A}$ выражение

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}], \tag{71,2}$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы, а $\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$ — ее магнитный момент. Для дальнейшего преобразования заметим, что к $\mathbf{A}$ можно прибавить, не изменяя поля, любой вектор, пропорциональный $\mathbf{n}$, — в силу формул (66,3) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при этом не изменятся. Поэтому вместо (71,2) с тем же правом можно написать:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e[3\mathbf{r}(\mathbf{nr})-\mathbf{n}r^2]+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}].$$

Но стоящее под знаком $\partial^2/\partial t^2$ выражение есть произведение, $n_\beta D_{\alpha\beta}$, вектора $\mathbf{n}$ на тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-\delta_{\alpha\beta}r^2)$ (см. § 41). Вводя вектор $\mathbf{D}$ с компонентами $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$, находим окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}}+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]. \tag{71,3}$$

Зная $\mathbf{A}$, мы можем теперь определить поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ с помощью общих формул (66,3):

$$\begin{aligned}\mathbf{H}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]+\frac{1}{6c}[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]+[[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},\\ \mathbf{E}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+\frac{1}{6c}[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}]\right\}.\end{aligned} \tag{71,4}$$

Интенсивность $dI$ излучения в телесный угол $do$ определяется согласно (66,6). Мы определим здесь полное излучение, т. е. энергию, излучаемую системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого усредним $dI$ по всем направлениям $\mathbf{n}$; полное излучение равно этому среднему, умноженному на $4\pi$. При усреднении квадрата магнитного поля все взаимные произведения первого, второго и третьего членов в $\mathbf{H}$ исчезают, так

что остаются только средние квадраты каждого из них. Несложные вычисления[1]) дают в результате

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^2}\ddot{\mathbf{m}}^2. \qquad (71,5)$$

Таким образом, полное излучение состоит из трех независимых частей; они называются соответственно *дипольным*, *квадрупольным и магнитно-дипольным* излучениями.

Отметим, что магнитно-дипольное излучение фактически во многих случаях отсутствует. Так, оно отсутствует у системы, в которой отношение заряда к массе у всех движущихся частиц одинаково (в этом случае отсутствует и дипольное излучение, как уже было отмечено в § 67). Действительно, у такой системы магнитный момент пропорционален механическому моменту импульса (см. § 44), и потому, в силу закона сохранения последнего, $\dot{\mathbf{m}} = 0$. По той же причине (см. задачу к § 44) магнитно-дипольное излучение отсутствует у всякой системы, состоящей всего из двух частиц (чего, однако, нельзя сказать о дипольном излучении).

**Задачи**

1. Вычислить полное эффективное излучение при рассеянии потока заряженных частиц одинаковыми с ними частицами.

Решение. Дипольное (а также магнитно-дипольное) излучение при столкновении одинаковых частиц отсутствует, так что надо вычислить квадрупольное излучение. Тензор квадрупольного момента системы из двух одинаковых частиц (относительно их общего центра инерции) равен

$$D_{\alpha\beta} = \frac{e}{2}(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}),$$

где $x_\alpha$ — компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$ между частицами. После трехкратного дифференцирования $D_{\alpha\beta}$ выражаем первую, вторую и третью производные по времени от координат $x_\alpha$ через относительную скорость частиц $v_\alpha$ согласно

$$\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \mu\ddot{x}_\alpha = \frac{m}{2}\ddot{x}_\alpha = \frac{e^2 x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{m}{2}\dddot{x}_\alpha = e^2\frac{v_\alpha r - 3x_\alpha v_r}{r^4},$$

---

[1]) Укажем удобный способ усреднения произведений компонент единичного вектора. Тензор $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будучи симметричным, может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Учитывая также, что его след равен 1, имеем:

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

Среднее же значение произведения четырех компонент равно

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}).$$

Правая часть составляется из единичных тензоров как тензор четвертого ранга, симметричный по всем индексам; общий коэффициент определяется затем путем свертывания по двум парам индексов, которое должно дать в результате 1.

где $v_r = \mathbf{v}\mathbf{r}/r$ — радиальная компонента скорости (второе равенство есть уравнение движения заряда, а третье получается дифференцированием второго). Вычисление приводит к следующему выражению для интенсивности

$$I = \frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = \frac{2e^6}{15m^2c^5}\frac{1}{r^4}\left(v^2 + 11v_\varphi^2\right)$$

$\left(v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2\right)$; $v$ и $v_\varphi$ выражаем через $r$ с помощью равенств

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \qquad v_\varphi = \frac{\rho v_0}{r}.$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по $dr$ подобно тому, как это было сделано в задаче 3 к § 70, т. е. написав

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{4e^2}{mr}}}.$$

В двойном интеграле (по $dr$ и $d\rho$) производим сначала интегрирование по $d\rho$, а затем по $dr$. В результате вычислений получается следующий результат:

$$\varkappa = \frac{4\pi}{9}\frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

2. Найти силу отдачи, действующую на излучающую систему частиц, совершающих стационарное финитное движение.

Решение. Искомая сила $\mathbf{F}$ вычисляется как потеря импульса системой в единицу времени, т. е. как поток импульса, уносимого испускаемыми системой электромагнитными волнами:

$$F_\alpha = \oint \sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta = \int \sigma_{\alpha\beta} n_\beta R_0^2\, do;$$

интегрирование производится по сферической поверхности большого радиуса $R_0$. Тензор напряжений дается формулой (33,3), а поле $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ берем из (71,4). Ввиду поперечности этих полей интеграл сводится к

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{8\pi}\int 2H^2 \mathbf{n} R_0^2\, do.$$

Усреднение по направлениям $\mathbf{n}$ производится с помощью формул, приведенных в примечании на стр. 250 (произведения же нечетного числа компонент $\mathbf{n}$ обращаются в нуль). В результате получим [1]):

$$F_\alpha = -\frac{1}{c^4}\left\{\frac{1}{15c}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dot{d}_\beta + \frac{2}{3}[\ddot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{m}}]_\alpha\right\}.$$

## § 72. Поле излучения на близких расстояниях

Формулы дипольного излучения были выведены нами для поля на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны (и тем более по сравнению с размерами излучающей системы).

[1]) Отметим, что эта сила — более высокого порядка по $1/c$, чем лоренцевы силы трения (§ 75). Последние не дают вклада в суммарную силу отдачи: сумма сил (75,5), действующих на частицы электрически нейтральной системы, равна нулю.