где $v_r = \mathbf{v}\mathbf{r}/r$ — радиальная компонента скорости (второе равенство есть уравнение движения заряда, а третье получается дифференцированием второго). Вычисление приводит к следующему выражению для интенсивности

$$I = \frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = \frac{2e^6}{15m^2c^5}\frac{1}{r^4}\left(v^2 + 11v_\varphi^2\right)$$

$\left(v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2\right)$; v и v_φ выражаем через r с помощью равенств

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \qquad v_\varphi = \frac{\rho v_0}{r}.$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr подобно тому, как это было сделано в задаче 3 к § 70, т. е. написав

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{4e^2}{mr}}}.$$

В двойном интеграле (по dr и $d\rho$) производим сначала интегрирование по $d\rho$, а затем по dr. В результате вычислений получается следующий результат:

$$\varkappa = \frac{4\pi}{9}\frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

2. Найти силу отдачи, действующую на излучающую систему частиц, совершающих стационарное финитное движение.

Решение. Искомая сила $\mathbf{F}$ вычисляется как потеря импульса системой в единицу времени, т. е. как поток импульса, уносимого испускаемыми системой электромагнитными волнами:

$$F_\alpha = \oint \sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta = \int \sigma_{\alpha\beta} n_\beta R_0^2\, do;$$

интегрирование производится по сферической поверхности большого радиуса R_0. Тензор напряжений дается формулой (33,3), а поле $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ берем из (71,4). Ввиду поперечности этих полей интеграл сводится к

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{8\pi}\int 2H^2 \mathbf{n} R_0^2\, do.$$

Усреднение по направлениям $\mathbf{n}$ производится с помощью формул, приведенных в примечании на стр. 250 (произведения же нечетного числа компонент $\mathbf{n}$ обращаются в нуль). В результате получим [1]):

$$F_\alpha = -\frac{1}{c^4}\left\{\frac{1}{15c}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dot{d}_\beta + \frac{2}{3}[\ddot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{m}}]_\alpha\right\}.$$

§ 72. Поле излучения на близких расстояниях

Формулы дипольного излучения были выведены нами для поля на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны (и тем более по сравнению с размерами излучающей системы).

[1]) Отметим, что эта сила — более высокого порядка по $1/c$, чем лоренцевы силы трения (§ 75). Последние не дают вклада в суммарную силу отдачи: сумма сил (75,5), действующих на частицы электрически нейтральной системы, равна нулю.

В этом параграфе мы будем по-прежнему считать, что длина волны велика по сравнению с размерами системы, но будем рассматривать поле на расстояниях, хотя и больших по сравнению с последними, но сравнимыми с длиной волны.

Формула (67,4) для векторного потенциала

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}} \tag{72,1}$$

по-прежнему остается в силе, так как для ее вывода было использовано лишь, что R_0 велико по сравнению с размерами системы. Однако поле нельзя рассматривать теперь, даже в небольших участках, как плоскую волну. Поэтому формулы (67,5) и (67,6) для электрического и магнитного полей уже неприменимы, и для их вычисления надо определить предварительно как $\mathbf{A}$, так и φ.

Формулу для скалярного потенциала можно получить из выражения для $\mathbf{A}$ непосредственно с помощью общего условия (62,1)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

наложенного на потенциалы. Подставляя в него (72,1) и интегрируя по времени, найдем:

$$\varphi=-\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{72,2}$$

Постоянную интегрирования (произвольную функцию координат) мы не пишем, так как нас интересует только переменная часть потенциала. Напомним, что в формуле (72,2), как и в (72,1), значение $\mathbf{d}$ должно браться в момент времени $t'=t-R_0/c$ [1]).

Теперь уже не представляет труда вычислить электрическое и магнитное поле. По обычным формулам, связывающим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с потенциалами, находим:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \tag{72,3}$$

$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}-\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}. \tag{72,4}$$

---

[1]) Иногда вводят так называемый вектор Герца, определяемый как

$$\mathbf{Z}=-\frac{1}{R_0}\mathbf{d}\left(t-\frac{R_0}{c}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{A}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Z}},\qquad \varphi=\operatorname{div}\mathbf{Z}.$$

Выражение для $\mathbf{E}$ можно переписать в другом виде, заметив, что $\mathbf{d}_{t'}/R_0$, как и всякая функция координат и времени вида

$$\frac{1}{R_0} f\left(t - \frac{R_0}{c}\right),$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mathbf{d}}{R_0} = \Delta\frac{\mathbf{d}}{R_0}.$$

Воспользовавшись также известной формулой

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a},$$

найдем, что

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{72,5}$$

Полученные формулы определяют поле на расстояниях, сравнимых с длиной волны. Во всех этих формулах нельзя, разумеется, выносить $1/R_0$ из-под знака дифференцирования по координатам, так как отношение членов, содержащих $1/R_0^2$, к членам с $1/R_0$ как раз порядка величины λ/R_0.

Наконец, напишем формулы для фурье-компонент поля. Для определения $\mathbf{H}_\omega$ подставляем в формулу (72,3) вместо $\mathbf{H}$ и $\mathbf{d}$ их монохроматические составляющие, т. е. соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$. Надо, однако, помнить, что величины в правой стороне равенств (72,1—5) берутся в момент времени $t' = t - R_0/c$. Поэтому мы должны подставить для $\mathbf{d}$ выражение

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega(t - R_0/c)} = \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}.$$

Производя подстановку и сокращая на $e^{-i\omega t}$, найдем:

$$\mathbf{H}_\omega = -ik\operatorname{rot}\left(\mathbf{d}_\omega\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right) = ik\left[\mathbf{d}_\omega\nabla\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right],$$

или, произведя дифференцирование,

$$\mathbf{H}_\omega = ik\,[\mathbf{d}_\omega\mathbf{n}]\left(\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2}\right)e^{ikR_0}, \tag{72,6}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$.

Аналогичным образом из (72,4) найдем:

$$\mathbf{E}_\omega = k^2\mathbf{d}_\omega\frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega\nabla)\nabla\frac{e^{ikR_0}}{R_0},$$

или, произведя дифференцирование,

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{d}_\omega\left(\frac{k^2}{R_0} + \frac{ik}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^3}\right)e^{ikR_0} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{d}_\omega)\left(-\frac{k^2}{R_0} - \frac{3ik}{R_0^2} + \frac{3}{R_0^3}\right)e^{ikR_0}. \tag{72,7}$$

На расстояниях, больших по сравнению с длиной волны ($kR_0 \gg 1$), в формулах (72,6—7) можно пренебречь членами с $1/R_0^2$ и $1/R_0^3$, и мы возвращаемся к полю «волновой зоны»:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0}[\mathbf{n}[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}]]e^{ikR_0}, \quad \mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0}[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}]e^{ikR_0}.$$

На расстояниях же, малых по сравнению с длиной волны ($kR_0 \ll 1$), пренебрегаем членами с $1/R_0$ и $1/R_0^2$ и полагаем $e^{ikR_0} \approx 1$; тогда

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{R_0^3}\{3\mathbf{n}(\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}) - \mathbf{d}_\omega\},$$

что соответствует статическому дипольному электрическому полю (§ 40); магнитное поле в этом приближении, естественно, отсутствует.

Задачи

1. Определить потенциалы поля квадрупольного и магнитно-дипольного излучений на близких расстояниях.

Решение. Предполагая, для краткости, что дипольное излучение вообще отсутствует, имеем (ср. вычисления, произведенные в § 71):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_{t-R/c}\frac{dV}{R} \approx -\frac{1}{c}\int (\mathbf{r}\nabla)\frac{\mathbf{j}_{t-R_0/c}}{R_0}dV,$$

где разложение подынтегрального выражения производится по степеням $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}$. В противоположность тому, что мы делали в § 71, множитель $1/R_0$ нельзя выносить теперь из-под знака дифференцирования. Выносим последний из-под знака интеграла и переписываем формулу в тензорных обозначениях:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\int \frac{x_\beta j_\alpha}{R_0}dV$$

(X_β обозначают компоненты радиус-вектора $\mathbf{R}_0$). Переходя от интеграла к сумме по зарядам, находим:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\left(\sum ev_\alpha x_\beta\right)_{t'}}{R_0}.$$

Тем же способом, что и в § 71, это выражение разделяется на квадрупольную и магнитно-дипольную части. Соответствующие скалярные потенциалы вычисляются по векторному потенциалу подобно тому, как это сделано в тексте. В результате получаем для квадрупольного излучения:

$$A_\alpha = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\dot{D}_{\alpha\beta}}{R_0}, \qquad \varphi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{D_{\alpha\beta}}{R_0},$$

и для магнитно-дипольного излучения:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{\mathbf{m}}{R_0}, \qquad \varphi = 0$$

(все величины в правых сторонах равенства берутся, как обычно, в момент времени $t' = t - R_0/c$).

Напряженности поля магнитно-дипольного излучения:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,\frac{\dot{\mathbf{m}}}{R_0}, \qquad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{m}}{R_0}.$$

Сравнивая с (72,3), (72,5), мы видим, что **H** и **E** в магнитно-дипольном случае выражаются через **m** так же, как соответственно **E** и —**H** выражаются через **d** в электрическом дипольном случае.

Спектральные компоненты потенциалов квадрупольного излучения:

$$A_\alpha^{(\omega)} = \frac{ik}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0}, \qquad \varphi^{(\omega)} = \frac{1}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0}.$$

Выражения для поля мы не выписываем здесь ввиду их громоздкости.

2. Найти скорость потери момента импульса системой зарядов при дипольном излучении ею электромагнитных волн.

Решение. Согласно (32,9) плотность потока момента электромагнитного поля дается пространственными компонентами 4-тензора $x^i T^{kl} - x^k T^{il}$. Переходя к трехмерным обозначениям, вводим трехмерный вектор момента с компонентами $\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} M^{\beta\gamma}$; плотность его потока дается трехмерным тензором

$$-\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} (x_\beta \sigma_{\gamma\delta} - x_\gamma \sigma_{\beta\delta}) = -e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \sigma_{\gamma\delta},$$

где $\sigma_{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta}$ — трехмерный максвелловский тензор напряжений (а все индексы пишем внизу соответственно трехмерным обозначениям). Полный момент, теряемый системой в единицу времени, равен потоку момента поля излучения через сферическую поверхность радиуса R_0:

$$\frac{dM_\alpha}{dt} = \oint e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \sigma_{\gamma\delta} n_\delta \, df,$$

где $df = R_0^2 \, do$, а **n** — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$. С тензором $\sigma_{\alpha\beta}$ из (33,3) получим:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{R_0^3}{4\pi} \int \{[\mathbf{nE}](\mathbf{nE}) + [\mathbf{nH}](\mathbf{nH})\} \, do. \tag{1}$$

Применяя эту формулу к полю излучения на больших расстояниях от системы, нельзя, однако, ограничиться членами $\sim 1/R_0$: в этом приближении $\mathbf{nE} = \mathbf{nH} = 0$, так что подынтегральное выражение обращается в нуль. Эти члены (даваемые (67,5—6)) достаточны лишь для вычисления множителей $[\mathbf{nE}]$ и $[\mathbf{nH}]$; продольные же компоненты полей **nE** и **nH** возникают от членов $\sim 1/R_0^2$ (в результате подынтегральное выражение в (1) становится $\sim 1/R_0^3$, и расстояние R_0, как и следовало, выпадает из ответа). В дипольном приближении длина волны $\lambda \gg a$, и надо различать члены, содержащие (по сравнению с (67,5—6)) лишний множитель $\sim \lambda/R_0$ или $\sim a/R_0$; достаточно оставить лишь первые. Именно эти члены можно получить из (72,3) и (72,5); вычисление с точностью до второго порядка по $1/R_0$ дает [1]):

$$\mathbf{En} = \frac{2}{cR_0^2} \mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}, \qquad \mathbf{Hn} = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Отличное от нуля значение **Hn** получилось бы лишь при учете членов высшего порядка по a/R_0.

Подставив (2) и (67,6) в (1), получим:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{2\pi c^3}\int [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}](\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}})\,do.$$

Наконец, написав подынтегральное выражение в виде $e_{\alpha\beta\gamma}n_\beta\dot{d}_\gamma n_\delta\dot{d}_\delta$ и усреднив по направлениям $\mathbf{n}$, найдем окончательно:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2}{3c^3}[\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}]. \tag{3}$$

Отметим, что для линейного осциллятора ($\mathbf{d} = \mathbf{d}_0\cos\omega t$ с вещественной амплитудой $\mathbf{d}_0$) выражение (3) обращается в нуль: потери момента при излучении не происходит.

§ 73. Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся со скоростью не малой по сравнению со скоростью света.

Формулы § 67, выведенные в предположении $v \ll c$, неприменимы к этому случаю непосредственно. Мы можем, однако, рассматривать частицу в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится; в этой системе отсчета упомянутые формулы, очевидно, применимы (обращаем внимание на то, что это возможно сделать лишь в случае одной движущейся частицы; для нескольких частиц не существует, вообще говоря, системы отсчета, в которой бы все они одновременно покоились).

Таким образом, в указанной системе отсчета частица излучает в течение времени dt энергию

$$d\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3}w^2\,dt \tag{73,1}$$

(согласно формуле (67,9)), где w — ускорение частицы в этой же системе. Полный же излучаемый ею импульс в рассматриваемой системе отсчета равен нулю

$$d\mathbf{P} = 0. \tag{73,2}$$

Действительно, излучение импульса определяется как интеграл от плотности потока импульса в поле излучения по замкнутой поверхности, охватывающей частицу. Но в силу свойств симметрии дипольного излучения импульсы, уносимые в противоположных направлениях, одинаковы по величине и противоположны по направлению; поэтому указанный интеграл обращается тождественно в нуль.

Для перехода к произвольной системе отсчета перепишем формулы (73,1) и (73,2) в четырехмерном виде. Легко видеть, что «излучение 4-импульса» dP^i должно быть записано как

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}dx^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}u^i\,ds. \tag{73,3}$$