Подставив (2) и (67,6) в (1), получим:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{2\pi c^3}\int [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}](\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}})\,do.$$

Наконец, написав подынтегральное выражение в виде $e_{\alpha\beta\gamma}n_\beta\dot{d}_\gamma n_\delta\dot{d}_\delta$ и усреднив по направлениям $\mathbf{n}$, найдем окончательно:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2}{3c^3}[\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}]. \tag{3}$$

Отметим, что для линейного осциллятора ($\mathbf{d} = \mathbf{d}_0\cos\omega t$ с вещественной амплитудой $\mathbf{d}_0$) выражение (3) обращается в нуль: потери момента при излучении не происходит.

§ 73. Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся со скоростью не малой по сравнению со скоростью света.

Формулы § 67, выведенные в предположении $v \ll c$, неприменимы к этому случаю непосредственно. Мы можем, однако, рассматривать частицу в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится; в этой системе отсчета упомянутые формулы, очевидно, применимы (обращаем внимание на то, что это возможно сделать лишь в случае одной движущейся частицы; для нескольких частиц не существует, вообще говоря, системы отсчета, в которой бы все они одновременно покоились).

Таким образом, в указанной системе отсчета частица излучает в течение времени dt энергию

$$d\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3}w^2\,dt \tag{73,1}$$

(согласно формуле (67,9)), где w — ускорение частицы в этой же системе. Полный же излучаемый ею импульс в рассматриваемой системе отсчета равен нулю

$$d\mathbf{P} = 0. \tag{73,2}$$

Действительно, излучение импульса определяется как интеграл от плотности потока импульса в поле излучения по замкнутой поверхности, охватывающей частицу. Но в силу свойств симметрии дипольного излучения импульсы, уносимые в противоположных направлениях, одинаковы по величине и противоположны по направлению; поэтому указанный интеграл обращается тождественно в нуль.

Для перехода к произвольной системе отсчета перепишем формулы (73,1) и (73,2) в четырехмерном виде. Легко видеть, что «излучение 4-импульса» dP^i должно быть записано как

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}dx^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}u^i\,ds. \tag{73,3}$$

Действительно, в системе отсчета, в которой частица покоится, пространственные компоненты 4-скорости u^i равны нулю, а $\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}=-\frac{w^2}{c^4}$; поэтому пространственные компоненты dP^i обращаются в нуль, а временная дает равенство (73,1).

Полное излучение 4-импульса за время пролета частицы через данное электромагнитное поле равно интегралу от выражения (73,3), т. е.

$$\Delta P^i=-\frac{2e^2}{3c}\int\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}dx^i. \tag{73,4}$$

Перепишем эту формулу в другом виде, выразив 4-ускорение du^i/ds через тензор внешнего электромагнитного поля с помощью уравнений движения (23,4):

$$mc\frac{du_k}{ds}=\frac{e}{c}F_{kl}u^l.$$

Мы получим тогда

$$\Delta P^i=-\frac{2e^4}{3m^2c^5}\int(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,dx^i. \tag{73,5}$$

Временная компонента уравнения (73,4) или (73,5) дает полное излучение энергии $\Delta\mathscr{E}$. Подставляя для четырехмерных величин их выражения через трехмерные величины, получим:

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{2e^2}{3c^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{w^2-\frac{[\mathbf{vw}]^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}dt \tag{73,6}$$

($\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение частицы), или, через внешние электрическое и магнитное поля:

$$\Delta\mathscr{E}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}I\,dt,\quad I=\frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{73,7}$$

Выражения для полного излучения импульса отличаются лишним множителем $\mathbf{v}$ под знаком интеграла.

Из формулы (73,7) видно, что при скоростях, близких к скорости света, полное излучение энергии в единицу времени зависит от скорости в основном как $(1-v^2/c^2)^{-1}$, т. е. пропорционально квадрату энергии движущейся частицы. Исключение представляет только движение в электрическом поле параллельно направлению поля. В этом случае множитель $(1-v^2/c^2)$, стоящий в знаменателе, сокращается с таким же множителем в числителе, и излучение оказывается не зависящим от энергии частицы.

Наконец, остановимся на вопросе об угловом распределении излучения быстро движущейся частицы. Для решения этой задачи удобно воспользоваться лиенар-вихертовским выражением для поля (63,8—9). На больших расстояниях мы должны сохранить в нем только член с более низкой степенью $1/R$ (второй член в формуле (63,8)). Вводя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении излучения ($\mathbf{R}=\mathbf{n}R$), получим формулы

$$\mathbf{E}=\frac{e}{c^2R}\frac{\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}\right]\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^3}, \qquad \mathbf{H}=[\mathbf{nE}], \tag{73,8}$$

где все величины в правых сторонах равенств берутся в запаздывающий момент времени $t'=t-R/c$.

Интенсивность излучения в телесный угол do равна $dI=\frac{c}{4\pi}E^2R^2\,do$. Раскрывая квадрат E^2, найдем:

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5}+\frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^6}\right\}do. \tag{73,9}$$

Если же мы хотим определить угловое распределение полного излучения за все время движения заряда, то надо проинтегрировать интенсивность по времени. При этом следует помнить, что интегрируемое выражение является функцией t'; поэтому надо писать

$$dt=\frac{\partial t}{\partial t'}dt'=\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)dt' \tag{73,10}$$

(см. (63,6)), после чего интегрирование производится непосредственно по dt'. Таким образом, имеем следующее выражение для полного излучения в элемент телесного угла do:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}=\frac{e^2}{4\pi c^3}do\int\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4}+\frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5}\right\}dt'. \tag{73,11}$$

Как видно из (73,9), угловое распределение излучения в общем случае довольно сложно. В ультрарелятивистском случае ($1-v/c\ll 1$) оно обладает характерной особенностью, связанной с наличием высоких степеней разности $1-\mathbf{vn}/c$ в знаменателях различных членов этого выражения. Именно, интенсивность велика в узком интервале углов, в котором мала раз-

ность $1-\mathbf{vn}/c$. Обозначив посредством θ малый угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, имеем:

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta \approx 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2};$$

эта разность мала ($\sim 1-v/c$) при $\theta \sim \sqrt{1-v/c}$ или, что то же,

$$\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (73,12)$$

Таким образом, ультрарелятивистская частица излучает в основном в направлении своего движения в интервал углов (73,12) вокруг направления скорости.

Укажем также, что при произвольных скорости и ускорении частицы всегда имеются такие два направления, в которых интенсивность излучения обращается в нуль. Это те направления, в которых вектор $\mathbf{n}-\mathbf{v}/c$ параллелен вектору $\mathbf{w}$ и потому поле (73,8) обращается в нуль (см. также задачу 2 в конце параграфа).

Наконец, выпишем более простые формулы, в которые переходит (73,9) в двух частных случаях.

Если скорость и ускорение частицы параллельны, то

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c^2R}\frac{[\mathbf{wn}]}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}$$

и интенсивность

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{w^2\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}do. \qquad (73,13)$$

Она, естественно, симметрична вокруг совместного направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ и обращается в нуль в направлениях по ($\theta=0$) и против ($\theta=\pi$) скорости. В ультрарелятивистском случае интенсивность как функция от θ имеет резкий двойной максимум в области (73,12) с «провалом» до нуля при $\theta=0$.

Если же скорость и ускорение взаимно перпендикулярны, то из (73,9) имеем:

$$dI=\frac{e^2w^2}{4\pi c^3}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\right]do, \qquad (73,14)$$

где θ — по-прежнему угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, а φ — азимутальный угол вектора $\mathbf{n}$ с плоскостью, проходящей через $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Эта интенсивность симметрична лишь относительно плоскости $\mathbf{vw}$ и обращается в нуль в двух направлениях в этой плоскости, образующих угол $\theta=\arccos(v/c)$ со скоростью.

Задачи

1. Определить полное излучение релятивистской частицы с зарядом e_1, пролетающей на прицельном расстоянии ρ в кулоновом поле неподвижного центра (потенциал $\varphi = e_2/r$).

Решение. При пролете через поле релятивистская частица почти не отклоняется[1]). Поэтому в (73,7) можно считать скорость $\mathbf{v}$ постоянной, соответственно чему поле в точке нахождения частицы

$$\mathbf{E} = \frac{e_2\mathbf{r}}{r^3} \approx \frac{e_2\mathbf{r}}{(\rho^2 + v^2t^2)^{3/2}},$$

причем $x = vt$, $y = \rho$. Произведя в (73,7) интегрирование по времени, получим:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12m^2c^3\rho^3 v}\,\frac{4c^2 - v^2}{c^2 - v^2}.$$

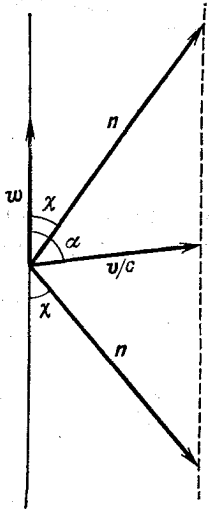

Рис. 15

2. Определить направления, в которых обращается в нуль интенсивность излучения движущейся частицы.

Решение. Из геометрического построения (рис. 15) находим, что искомые направления $\mathbf{n}$ лежат в плоскости, проходящей через $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, и образуют с направлением $\mathbf{w}$ угол χ, определяющийся из соотношения

$$\sin\chi = \frac{v}{c}\sin\alpha,$$

где α — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

3. Определить интенсивность излучения заряженной частицей, стационарно движущейся в поле циркулярно-поляризованной плоской электромагнитной волны.

Решение. Согласно результатам задачи 3 § 48 частица движется по окружности, причем ее скорость в каждый момент времени параллельна полю $\mathbf{H}$ и перпендикулярна полю $\mathbf{E}$. Ее кинетическая энергия

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = c\gamma$$

(обозначения из указанной задачи). По формуле (73,7) находим интенсивность излучения:

$$I = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{\mathbf{E}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2e^4E_0^2}{3m^2c^3}\left[1 + \left(\frac{eE_0}{mc\omega}\right)^2\right].$$

4. То же в поле линейно поляризованной волны.

Решение. Согласно результатам задачи 2 § 48 движение происходит в плоскости xy, проходящей через направление распространения волны (ось x) и направление поля $\mathbf{E}$ (ось y); поле $\mathbf{H}$ направлено по оси z (при-

---

[1]) При $v \sim c$ отклонение на заметный угол может иметь место лишь при прицельных расстояниях $\rho \sim e^2/mc^2$, которые вообще не допускают классического рассмотрения.

чем $H_z = E_y$). По (73,7) находим:

$$I = \frac{2e^4\mathbf{E}^2}{3m^2c^3}\frac{\left(1-\frac{v_x}{c}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Усреднение по периоду движения, задаваемого полученным в указанной задаче параметрическим представлением, приводит к результату

$$\bar{I} = \frac{e^4E_0^2}{3m^2c^3}\left[1+\frac{3}{8}\left(\frac{eE_0}{mc\omega}\right)^2\right].$$

§ 74. Магнито-тормозное излучение

Рассмотрим излучение заряда, движущегося с произвольной скоростью по окружности в постоянном однородном магнитном поле; такое излучение называют *магнито-тормозным*.

Радиус орбиты r и циклическая частота движения ω_H выражаются через напряженность поля H и скорость частицы v формулами (см. § 21)

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (74,1)$$

Полная интенсивность излучения по всем направлениям определяется по формуле (73,7), в которой надо положить $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$:

$$I = \frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (74,2)$$

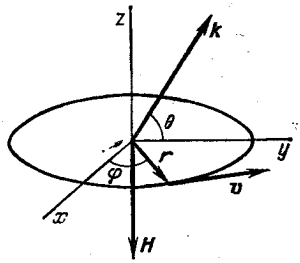

Рис. 16

Мы видим, что полная интенсивность пропорциональна квадрату импульса частицы.

Если же мы интересуемся угловым распределением излучения, то надо воспользоваться формулой (73,11). Интерес представляет интенсивность, усредненная по периоду движения. Соответственно этому будем интегрировать в (73,11) по времени обращения частицы по окружности и разделим результат на величину периода $T = 2\pi/\omega_H$.

Выберем плоскость орбиты в качестве плоскости xy (начало координат — в центре окружности), а плоскость yz проводим через направление излучения $\mathbf{k}$ (рис. 16). Магнитное поле будет направлено в отрицательном направлении оси z (изображенное на рис. 16 направление движения частицы отвечает положительному заряду e). Пусть, далее, θ — угол между направлением