

чём $H_z = E_y$). По (73,7) находим:

$$I = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3} \frac{\left(1 - \frac{v_x}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Усреднение по периоду движения, задаваемого полученным в указанной задаче параметрическим представлением, приводит к результату

$$\bar{I} = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2 c^3} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{eE_0}{mc\omega} \right)^2 \right].$$

§ 74. Магнито-тормозное излучение

Рассмотрим излучение заряда, движущегося с произвольной скоростью по окружности в постоянном однородном магнитном поле; такое излучение называют *магнито-тормозным*.

Радиус орбиты r и циклическая частота движения ω_H выражаются через напряженность поля H и скорость частицы v формулами (см. § 21)

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (74,1)$$

Полная интенсивность излучения по всем направлениям определяется по формуле (73,7), в которой надо положить $E = 0$ и $H \perp v$:

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (74,2)$$

Мы видим, что полная интенсивность пропорциональна квадрату импульса частицы.

Если же мы интересуемся угловым распределением излучения, то надо воспользоваться формулой (73,11). Интерес представляет интенсивность, усредненная по периоду движения. Соответственно этому будем интегрировать в (73,11) по времени обращения частицы по окружности и разделим результат на величину периода $T = 2\pi/\omega_H$.

Выберем плоскость орбиты в качестве плоскости xy (начало координат — в центре окружности), а плоскость yz проводим через направление излучения k (рис. 16). Магнитное поле будет направлено в отрицательном направлении оси z (изображенное на рис. 16 направление движения частицы отвечает положительному заряду e). Пусть, далее, θ — угол между направлением

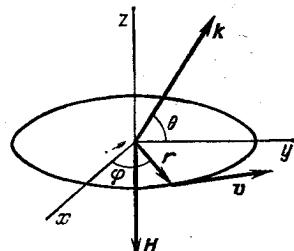


Рис. 16

излучения \mathbf{k} и осью y , а $\Phi = \omega_H t$ — угол между радиус-вектором частицы и осью x . Тогда косинус угла между направлением \mathbf{k} и скоростью \mathbf{v} равен $\cos \theta \cos \varphi$ (вектор \mathbf{v} лежит в плоскости xy и в каждый момент времени перпендикулярен к радиус-вектору частицы). Ускорение частицы \mathbf{w} выражаем через поле \mathbf{H} и скорость \mathbf{v} согласно уравнению движения (см. (21,1)):

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} [\mathbf{vH}].$$

После простого вычисления получим:

$$\overline{dI} = d\sigma \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{v}{c} - \cos \theta \cos \varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \varphi\right)^5} d\varphi \quad (74,3)$$

(интегрирование по времени заменено интегрированием по $d\varphi = \omega_H dt$). Процесс интегрирования элементарен, хотя выкладки довольно громоздки. В результате получается следующая формула:

$$\overline{dI} = d\sigma \frac{e^4 H^2 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2 c^5} \frac{\left[2 - \cos^2 \theta - \frac{v^2}{4c^2} \left(1 + \frac{3v^2}{c^2}\right) \cos^4 \theta\right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}}. \quad (74,4)$$

Отношение интенсивностей излучения под углом $\theta = \pi/2$ (перпендикулярно к плоскости орбиты) и под углом $\theta = 0$ (в плоскости орбиты) равно

$$\frac{(dI/d\sigma)_0}{(dI/d\sigma)_{\pi/2}} = \frac{4 + 3 \frac{v^2}{c^2}}{8 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}. \quad (74,5)$$

При $v \rightarrow 0$ это отношение стремится к $1/2$, но при скоростях, близких к скорости света, оно становится очень большим. Мы вернемся еще к этому вопросу ниже.

Далее, рассмотрим спектральное распределение излучения. Поскольку движение заряда периодично, то речь идет о разложении в ряд Фурье. Вычисление удобно начать с векторного потенциала. Для его компоненты Фурье имеем формулу (ср. (66,12))

$$\mathbf{A}_n = e^{\frac{i k R_0}{c R_0 T}} \oint \exp \{i (\omega_H n t - kr)\} dr,$$

где интегрирование производится вдоль траектории частицы (окружности). Для координат частицы имеем $x = r \cos \omega_H t$,

$y = r \sin \omega_n t$. В качестве переменной интегрирования выбираем угол $\varphi = \omega_n t$. Замечая, что

$$\mathbf{kr} = kr \cos \theta \sin \varphi = \frac{nv}{c} \cos \theta \sin \varphi$$

($k = n\omega_n/c = nv/cr$), находим для компоненты Фурье x -составляющей векторного потенциала

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi c R_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} e^{in(\varphi - \frac{v}{c} \cos \theta \sin \varphi)} \sin \varphi d\varphi.$$

С таким интегралом нам приходилось уже иметь дело в § 70. Он выражается через производную от функции Бесселя:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0} e^{ikR_0} J'_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right). \quad (74,6)$$

Аналогичным образом вычисляется A_{yn} :

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0 \cos \theta} e^{ikR_0} J_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right). \quad (74,7)$$

Компонента же вдоль оси z , очевидно, вообще отсутствует.

По формулам § 66 имеем для интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_n$ в элемент телесного угла $d\Omega$:

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 d\Omega = \frac{c}{2\pi} |[\mathbf{kA}_n]|^2 R_0^2 d\Omega.$$

Замечая, что

$$|[\mathbf{kA}]|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \sin^2 \theta,$$

и подставляя выражения (74,6—7), получим для интенсивности излучения следующую формулу (G. A. Schott, 1912):

$$dI_n = \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi c^3 m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left[\operatorname{tg}^2 \theta \cdot J_n^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) \right] d\Omega. \quad (74,8)$$

Для определения полной по всем направлениям интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_n$ это выражение должно быть проинтегрировано по всем углам. Интегрирование, однако, не может быть произведено в конечном виде. Посредством ряда преобразований, использующих некоторые соотношения теории функций Бесселя, искомый интеграл может быть приведен к следующему виду:

$$I_n = \frac{2e^4 H^2}{m^2 c^2 v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left[n \frac{v^2}{c^2} J'_{2n} \left(\frac{2nv}{c} \right) - n^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi) d\xi \right]. \quad (74,9)$$

Рассмотрим более подробно ультраквазиэстинский случай, когда скорость движения частицы близка к скорости света.

Положив в числителе формулы (74,2) $v = c$, найдем, что полная интенсивность магнито-тормозного излучения в ультраквазиэстинском случае пропорциональна квадрату энергии частицы \mathcal{E} :

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2. \quad (74,10)$$

Угловое распределение излучения в этом случае крайне анизотропно. Оно сосредоточено в основном вблизи плоскости орбиты. Угловую ширину $\Delta\theta$, в которой заключена основная часть излучения, легко оценить из условия $1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \sim 1 - \frac{v^2}{c^2}$.

Очевидно, что

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \quad (74,11)$$

(этот результат находится, конечно, в соответствии с рассмотренным в предыдущем параграфе угловым распределением мгновенной интенсивности, см. (73,12)¹⁾).

Специфическим характером обладает в ультраквазиэстинском случае также и спектральное распределение излучения (Л. А. Арцимович и И. Я. Померанчук, 1945).

Мы увидим ниже, что в этом случае основную роль в излучении играют частоты с очень большими n . В связи с этим можно воспользоваться асимптотической формулой (70.9), согласно которой имеем:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n^{1/3}}} \Phi[n^{2/3}(1 - \xi^2)]. \quad (74,12)$$

Подставив в (74,9), получим следующую формулу для спектрального распределения излучения при больших значениях n ²⁾:

$$J_n = \frac{2e^4 H^2}{\sqrt{\pi m^2 c^3}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \sqrt{u} \left[-\Phi'(u) - \frac{u}{2} \int_u^{\infty} \Phi(u) du \right], \quad (74,13)$$

$$u = n^{2/3} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2.$$

¹⁾ Не смешивать, однако, угол θ в этом параграфе с углом Θ между \mathbf{n} и \mathbf{v} в § 73!

²⁾ При подстановке один из пределов интеграла ($n^{2/3}$) заменен, с требуемой точностью, на бесконечность, и везде, где возможно, положено $v = c$. Хотя в интеграле в (74,9) фигурируют также и не близкие к 1 значения ξ , тем не менее использование формулы (74,12) допустимо, поскольку интеграл быстро сходится на нижнем пределе.

При $u \rightarrow 0$ выражение в квадратных скобках стремится к постоянному пределу $-\Phi'(0) = 0,4587 \dots$ ¹⁾. Поэтому при $u \ll 1$ имеем:

$$I_n = 0,52 \frac{e^4 H^2}{m^2 c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 n^{1/3}, \quad 1 \ll n \ll \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3. \quad (74,14)$$

При $u \gg 1$ можно воспользоваться известным асимптотическим выражением функции Эйри (см. примечание на стр. 201) и получить:

$$I_n = \frac{e^4 H^2 n^{1/2}}{2 \sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^{5/2} \exp \left[-\frac{2}{3} n \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^3 \right], \quad n \gg \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3, \quad (74,15)$$

т. е. интенсивность экспоненциально падает при очень больших n .

Спектральное распределение имеет, следовательно, максимум при $n \sim (\mathcal{E}/mc^2)^3$, и основная часть излучения сосредоточена в области частот

$$\omega \sim \omega_H \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3 = \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2. \quad (74,16)$$

Эти частоты очень велики по сравнению с расстоянием ω_H между двумя соседними из них. Другими словами, спектр излучения состоит из очень большого числа близко расположенных линий, т. е. имеет квазинепрерывный характер. Вместо функции распределения I_n можно поэтому ввести распределение по непрерывному ряду частот $\omega = n\omega_H$, написав

$$dI = I_n dn = I_n \frac{d\omega}{\omega_H}.$$

Для численных расчетов удобно выразить это распределение через функции Макдональда K_v ²⁾. Путем несложных преобра-

¹⁾ Согласно определению функции Эйри имеем:

$$\Phi'(0) = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi \sin \frac{\xi^3}{3} d\xi = - \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 3^{1/3}} \int_0^\infty x^{-1/3} \sin x dx = - \frac{3^{1/6} \Gamma(3/2)}{2 \sqrt{\pi}}.$$

²⁾ Связь функций Эйри с функцией $K_{v/2}$ дается формулой (4) в примечании на стр. 201. При дальнейших преобразованиях используются рекуррентные соотношения

$$K_{v-1}(x) - K_{v+1}(x) = - \frac{2v}{x} K_v(x), \quad 2K'_v(x) = - K_{v-1}(x) - K_{v+1}(x),$$

причем $K_{-v}(x) = K_v(x)$. В частности, легко найти, что

$$\Phi'(t) = - \frac{t}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right).$$

зований формулы (74,13) оно может быть представлено в виде

$$dI = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 H}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad F(\xi) = \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi, \quad (74,17)$$

где обозначено

$$\omega_c = \frac{3eH}{2mc} \left(\frac{c}{mc^2} \right)^2. \quad (74,18)$$

На рис. 17 изображен график функции $F(\xi)$.

Наконец, несколько замечаний о случае, когда частица движется не по плоской круговой орбите, а по винтовой траектории,

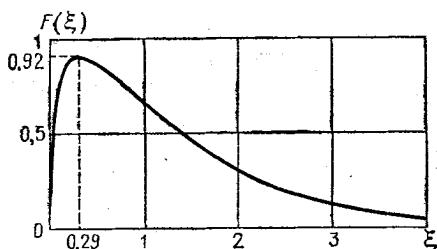


Рис. 17

т. е. имеет продольную (по отношению к полю) скорость $v_{||} = v \cos \chi$ (χ — угол между \mathbf{H} и \mathbf{v}). Частота вращательного движения дается той же формулой (74,1), но вектор \mathbf{v} описывает не круг, а поверхность конуса с осью вдоль \mathbf{H} и углом 2χ при вершине. Полная интенсивность излучения (понимаемая как полная по-

теря энергии частицей в 1 с) будет отличаться от (74,2) заменой H на $H_{\perp} = H \sin \chi$.

В ультрапараллаксистском случае излучение сконцентрировано в направлениях вблизи образующих «конуса скоростей». Спектральное распределение и полная интенсивность (понимаемые в том же смысле) получаются из (74,17) и (74,10) заменой $H \rightarrow H_{\perp}$. Если же речь идет об интенсивности, наблюдаемой в указанных направлениях удаленным неподвижным наблюдателем, то в формулы надо ввести множитель, учитывающий общее приближение или удаление излучателя (движущейся по кружку частицы) от наблюдателя. Этот множитель дается отношением $dt/dt_{\text{наб}}$, где $dt_{\text{наб}}$ — интервал времени между поступлением к наблюдателю сигналов, испускаемых источником с интервалом dt . Очевидно, что

$$dt_{\text{наб}} = dt \left(1 - \frac{1}{c} v_{||} \cos \theta \right),$$

где θ — угол между направлениями \mathbf{k} и \mathbf{H} (последнее принято за положительное направление скорости $v_{||}$). В ультрапараллаксистском случае, когда направление \mathbf{k} близко к направлению \mathbf{v} , имеем $\theta \approx \chi$, так что

$$\frac{dt}{dt_{\text{наб}}} = \left(1 - \frac{v_{||}}{c} \cos \chi \right)^{-1} \approx \frac{1}{\sin^2 \chi}. \quad (74,19)$$

Задачи

1. Определить закон изменения энергии со временем для заряда, движущегося по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле и теряющего энергию путем излучения.

Решение. Согласно (74,2) имеем для потери энергии в единицу времени:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^4 H^2}{3m^4 c^7} (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)$$

(\mathcal{E} — энергия частицы). Отсюда находим:

$$\frac{\mathcal{E}}{mc^2} = \operatorname{cth} \left(\frac{2e^4 H^2}{3m^3 c^5} t + \text{const} \right).$$

С увеличением t энергия монотонно падает, приближаясь к значению $\mathcal{E} = mc^2$ (полная остановка частицы) асимптотически при $t \rightarrow \infty$.

2. Найти асимптотическую формулу для спектрального распределения излучения с большими значениями n для частицы, движущейся по окружности со скоростью, не близкой к скорости света.

Решение. Используем известную формулу теории функций Бесселя:

$$J_n(ne) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n} (1-e^2)^{1/4}} \left[\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} e^{\sqrt{1-e^2}} \right]^n,$$

справедливую при $n(1-e^2)^{1/2} \gg 1$. С ее помощью находим из (74,9):

$$I_n = \frac{e^4 H^2 \sqrt{n}}{2\sqrt{\pi} m^2 c^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{6/4} \left[\frac{v/c}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} e^{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]^{2n}.$$

Эта формула применима при $n(1-v^2/c^2)^{1/2} \gg 1$; если к тому же $1-v^2/c^2$ мало, то формула переходит в (74,15).

3. Найти поляризацию магнито-тормозного излучения.

Решение. Электрическое поле E_n вычисляется по векторному потенциалу A_n (74,6—7) по формуле

$$E_n = \frac{i}{k} [k A_n] k = -\frac{i}{k} k (k A_n) + ik A_n.$$

Пусть e_1, e_2 — единичные векторы в плоскости, перпендикулярной к k , причем e_1 параллелен оси x , а e_2 лежит в плоскости yz (их компоненты: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, \sin \theta, -\cos \theta)$); векторы e_1, e_2, k образуют правую тройку. Тогда электрическое поле будет:

$$E_n = ik A_{xn} e_1 + ik \sin \theta A_{yn} e_2,$$

или, опустив несущественные общие множители:

$$E_n \propto \frac{v}{c} J'_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) e_1 + \operatorname{tg} \theta J_n \left(\frac{nv}{c} \cos \theta \right) i e_2.$$

Волна эллиптически поляризована (см. § 48).

В ультраквантитативистском случае для больших n и малых углов θ функции J_n и J'_n выражаются через $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$, причем в их аргументах полагаем

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2.$$

В результате получим:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_1 \Psi K_{3/2} \left(\frac{n}{3} \Psi^3 \right) + i \mathbf{e}_2 \theta K_{1/2} \left(\frac{n}{3} \Psi^3 \right), \quad \Psi = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2}.$$

При $\theta = 0$ эллиптическая поляризация вырождается в линейную вдоль \mathbf{e}_1 . При больших θ ($|\theta| \gg mc^2/\mathcal{E}$, $n\Psi^3 \gg 1$) имеем $K_{1/2}(x) \approx K_{3/2}(x) \approx \sqrt{\pi/2x} e^{-x}$ и поляризация стремится к круговой: $\mathbf{E}_n \propto \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$; интенсивность излучения, однако, становится при этом экспоненциально малой. В промежуточной области углов малая ось эллипса лежит вдоль \mathbf{e}_2 , а большая — вдоль \mathbf{e}_1 . Направление вращения зависит от знака угла θ ($\theta > 0$, если направления \mathbf{H} и \mathbf{E} лежат по разные стороны от плоскости орбиты, как изображено на рис. 16).

§ 75. Торможение излучением

В § 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням v/c приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов. Произведем теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены.

В разложении скалярного потенциала

$$\Phi = \int \frac{1}{R} \rho_{t-R/c} dV,$$

член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\Phi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2 \rho dV. \quad (75.1)$$

По тем же причинам, что и при выводе (65.3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т. е.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV. \quad (75.2)$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f,$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\Phi^{(3)}$ обратился в нуль:

$$f = -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho dV.$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'^{(2)} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \int R^2 \rho dV = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathbf{R} \rho dV. \end{aligned}$$