

В результате получим:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_1 \Psi K_{3/2} \left(\frac{n}{3} \Psi^3 \right) + i \mathbf{e}_2 \theta K_{1/2} \left(\frac{n}{3} \Psi^3 \right), \quad \Psi = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2}.$$

При $\theta=0$ эллиптическая поляризация вырождается в линейную вдоль \mathbf{e}_1 . При больших θ ($|\theta| \gg mc^2/\mathcal{E}, n\Psi^3 \gg 1$) имеем $K_{1/2}(x) \approx K_{3/2}(x) \approx \sqrt{\pi/2x} e^{-x}$ и поляризация стремится к круговой: $\mathbf{E}_n \propto \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$; интенсивность излучения, однако, становится при этом экспоненциально малой. В промежуточной области углов малая ось эллипса лежит вдоль \mathbf{e}_2 , а большая — вдоль \mathbf{e}_1 . Направление вращения зависит от знака угла θ ($\theta > 0$, если направления \mathbf{H} и \mathbf{E} лежат по разные стороны от плоскости орбиты, как изображено на рис. 16).

§ 75. Торможение излучением

В § 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням v/c приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов. Произведем теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены.

В разложении скалярного потенциала

$$\Phi = \int \frac{1}{R} \rho_{t-R/c} dV,$$

член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\Phi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2 \rho dV. \quad (75.1)$$

По тем же причинам, что и при выводе (65.3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т. е.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV. \quad (75.2)$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f,$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\Phi^{(3)}$ обратился в нуль:

$$f = -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho dV.$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'^{(2)} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \int R^2 \rho dV = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathbf{R} \rho dV. \end{aligned}$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, для первого слагаемого в правой части получим выражение $-\frac{1}{c^2} \sum e\mathbf{v}$. Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где \mathbf{R}_0 и \mathbf{r} имеют обычный смысл (см. § 66); тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{v}}$, и второе слагаемое принимает вид $\frac{1}{3c^2} \sum e\mathbf{v}$. Таким образом,

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2} \sum e\dot{\mathbf{v}}. \quad (75,3)$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}'^{(2)} = 0$), поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат. Электрическое же поле, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}^{(2)}/c$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}, \quad (75,4)$$

где \mathbf{d} — дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению дополнительных действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65,7); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение¹⁾ и вычислим среднюю работу, производимую полем (75,4) за единицу времени. На каждый заряд e действует сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}. \quad (75,5)$$

В единицу времени эта сила производит работу, равную $f\mathbf{v}$; полная работа, совершенная над всеми зарядами, равна сумме по зарядам:

$$\sum f\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{d}} \ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}}^2.$$

При усреднении по времени первый член исчезает, так что средняя работа оказывается равной

$$\sum \bar{f}\bar{\mathbf{v}} = -\frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}}^2. \quad (75,6)$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятое с обратным знаком) среднее излучение энергии системой за единицу времени (см. (67,8)). Таким образом, возникающие в третьем приближении силы (75,5) описывают обратное действие излучения на заряды. Эти силы носят название *торможения излучением* или *лоренцевых сил трения*.

¹⁾ Точнее, — движение, которое было бы стационарным при пренебрежении излучением, приводящим к постепенному затуханию движения.

Одновременно с потерей энергии в излучающей системе зарядов происходит также и потеря момента импульса. Уменьшение момента импульса в единицу времени, $d\mathbf{M}/dt$, легко вычислить с помощью выражений для сил торможения. Дифференцируя момент $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$ по времени, имеем $\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{rp}]$, так как $\sum [\mathbf{rp}] = \sum m[\mathbf{vv}] = 0$. Производную по времени от импульса частицы заменяем действующей на нее силой трения (75,5) и находим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{rf}] = \frac{2}{3c^3} \sum e [\mathbf{rd}] = \frac{2}{3c^3} [\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}].$$

Нас интересует среднее по времени значение потери момента импульса при стационарном движении, подобно тому как выше нас интересовала средняя потеря энергии. Написав

$$[\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}] - [\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}]$$

и замечая, что полная производная по времени (первый член) при усреднении исчезает, найдем окончательно следующее выражение для средней потери момента импульса излучающей системой¹⁾:

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = - \frac{2}{3c^3} \overline{[\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}]}. \quad (75,7)$$

Торможение излучением имеет место и при наличии одного движущегося во внешнем поле заряда. Оно равно

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \mathbf{v}. \quad (75,8)$$

Для одной частицы можно всегда выбрать такую систему отсчета, в которой она в данный момент времени поконится. Если вычислять в такой системе дальнейшие члены разложения создаваемого зарядом поля, то легко убедиться в том, что при стремлении к нулю радиус-вектора \mathbf{R} от заряда к точке наблюдения все эти члены обращаются в нуль. Таким образом, в случае одного заряда формула (75,8) является точным выражением для обратного действия излучения в той системе отсчета, в которой заряд поконится.

Надо, однако, иметь в виду, что описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения вообще не является вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия. Уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который действует только сила (75,8), имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} \mathbf{v}.$$

¹⁾ В согласии с результатом (3), полученным в задаче 2 § 72.

Это уравнение имеет, кроме тривиального решения $v = \text{const}$, еще решение, в котором ускорение v пропорционально $\exp(3mc^3t/2e^2)$, т. е. неограниченно возрастает со временем. Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться». Абсурдность этого результата свидетельствует об ограниченной применимости формулы (75,8).

Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести к абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию. Корни этой трудности находятся, в действительности, в упоминавшейся ранее (§ 37) бесконечной электромагнитной «собственной массе» элементарных частиц. Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим, по существу, приписываем ему формально бесконечную же отрицательную «собственную массу» неэлектромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы. Поскольку, однако, вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне корректной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к указанной здесь.

В системе координат, в которой скорость частицы мала, уравнение движения с учетом торможения излучением имеет вид

$$m\ddot{v} = eE + \frac{e}{c}[vH] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}. \quad (75,9)$$

По изложенным соображениям, это уравнение применимо только постольку, поскольку сила торможения мала по сравнению с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля.

Для выяснения физического смысла этого условия поступим следующим образом. В системе отсчета, в которой заряд в данный момент поконится, вторая производная от скорости по времени равна, при пренебрежении силой торможения:

$$\ddot{v} = \frac{e}{m}\dot{E} + \frac{e}{mc}[\dot{v}H].$$

Во втором члене подставляем (ограничиваясь той же точностью) $v = eE/m$ и получаем:

$$\ddot{v} = \frac{e}{m}\dot{E} + \frac{e^2}{m^2c}[EH].$$

Соответственно этому сила торможения будет состоять из двух членов:

$$f = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{E} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[EH]. \quad (75,10)$$

Если ω есть частота движения, то \dot{E} пропорционально ωE и,

следовательно, первый член порядка величины $\frac{e^3 \Phi}{mc^3} E$; второй же — порядка $\frac{e^4}{m^2 c^4} EH$. Поэтому условие малости сил торможения по сравнению с действующей на заряд внешней силой eE дает, во-первых:

$$\frac{e^2}{mc^3} \omega \ll 1,$$

или, вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \quad (75,11)$$

Таким образом, формула (75,8) для торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда e^2/mc^2 . Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой (см. § 37).

Во-вторых, сравнивая второй член в силе торможения с силой eE , находим условие

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{e^3} \quad (75,12)$$

(или $c/\omega_H \gg e^2/mc^2$, где $\omega_H = eH/mc$). Таким образом, необходимо также, чтобы само поле не было слишком велико. Поля $\sim m^2 c^4/e^3$ тоже являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям. И здесь надо иметь в виду, что в действительности электродинамика становится неприменимой, вследствие квантовых эффектов, уже при значительно меньших полях¹⁾.

Напомним во избежание недоразумений, что длина волны в (75,11) и величина поля в (75,12) относятся к той системе отсчета, в которой частица в данный момент покоятся.

Задача

Определить время, в течение которого два притягивающихся заряда, совершающих эллиптическое движение (со скоростью, малой в сравнении со скоростью света) и теряющие энергию вследствие излучения, «упадут» друг на друга.

Решение. Предполагая относительную потерю энергии за один оборот малой, мы можем положить производную по времени от энергии равной средней интенсивности излучения (определенной в задаче 1 § 70):

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dt} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2} \mu^{5/2} a^3}{3c^3 M} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(3 - \frac{2|\mathcal{E}| M^2}{\mu a^2} \right), \quad (1)$$

где $\alpha = |e_1 e_2|$. Наряду с энергией, частицы теряют момент количества движения. Потеря момента в единицу времени дается формулой (75,7); под-

¹⁾ При полях $\sim m^2 c^3/\hbar e$, т. е. когда $\hbar \omega_H \sim mc^2$. Этот предел в $\hbar c/e^2 = 137$ раз меньше предела, устанавливаемого условием (75,12). (Ср. примечание на стр. 127.)

ставляя в нее выражение (70,1) для d и замечая, что $\mu g = -\alpha r/r^3$ и $M = \mu [rv]$, находим

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\alpha}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{M}{r^3}.$$

Это выражение усредняем по периоду движения. Учитывая медленность изменения M , в правой стороне равенства достаточно усреднить лишь r^{-3} ; это среднее значение вычисляется точно так, как вычислялось в задаче 1 § 70 среднее значение от r^{-4} . В результате находим для средней потери момента в единицу времени следующее выражение:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\alpha (2\mu |\mathcal{E}|)^{3/2}}{3c^3 M^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \quad (2)$$

(знак среднего, как и в (1), опускаем). Разделив (1) на (2), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dM} = -\frac{\mu \alpha^2}{2M^3} \left(3 - 2 \frac{|\mathcal{E}| M^2}{\mu \alpha^2} \right),$$

интегрируя которое, найдем:

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu \alpha^2}{2M^2} \left(1 - \frac{M^3}{M_0^3} \right) + \frac{|\mathcal{E}_0|}{M_0} M. \quad (3)$$

Постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы при $M = M_0$ было $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, где M_0 и \mathcal{E}_0 — начальные значения момента и энергии частиц. «Падению» частиц друг на друга соответствует $M \rightarrow 0$. Из (3) видно, что при этом, как и следовало, $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$.

Заметим, что произведение $|\mathcal{E}| M^2$ стремится к $\mu \alpha^2/2$ и из формулы (70,3) видно, что эксцентриситет $e \rightarrow 0$, т. е. по мере сближения частиц орбита приближается к окружности. Подставляя (3) в (2), определяем производную dt/dM , выраженную как функция от M , после чего интегрирование по dM в пределах от M_0 до нуля дает время падения:

$$t_{\text{пад}} = \frac{c^3 M_0^5}{\mu \sqrt{2} |\mathcal{E}_0|} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^{-2} \left(\sqrt{\mu \alpha^2} + \sqrt{2M_0^2 |\mathcal{E}_0|} \right)^{-2}.$$

§ 76. Торможение излучением в релятивистском случае

Выведем релятивистское выражение для торможения излучением (для одного заряда), применимое и при движении со скоростями порядка скорости света. Эта сила будет теперь 4-вектором g^i , которым надо дополнить уравнение движения заряда, написанное в четырехмерном виде:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k + g^i. \quad (76,1)$$

Для определения g^i заметим, что при $v \ll c$ его три пространственные компоненты должны перейти в компоненты вектора f/c (75,8). Легко видеть, что этим свойством обладает 4-вектор $\frac{2e^2}{3c} \frac{d^2 u^i}{ds^2}$. Он, однако, не удовлетворяет тождеству $g^i u_i = 0$, которое имеет место для компонент всякого 4-вектора