ставляя в нее выражение (70,1) для $\mathbf{d}$ и замечая, что $\mu\mathbf{r} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$ и $\mathbf{M} = \mu[\mathbf{rv}]$, находим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\alpha}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

Это выражение усредняем по периоду движения. Учитывая медленность изменения $\mathbf{M}$, в правой стороне равенства достаточно усреднить лишь r^{-3}; это среднее значение вычисляется точно так, как вычислялось в задаче 1 § 70 среднее значение от r^{-4}. В результате находим для средней потери момента в единицу времени следующее выражение:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\alpha\,(2\mu\,|\mathscr{E}|)^{3/2}}{3c^3M^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \tag{2}$$

(знак среднего, как и в (1), опускаем). Разделив (1) на (2), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\,|\mathscr{E}|}{dM} = -\frac{\mu\alpha^2}{2M^3}\left(3 - 2\frac{|\mathscr{E}|\,M^2}{\mu\alpha^2}\right),$$

интегрируя которое, найдем:

$$|\mathscr{E}| = \frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\left(1 - \frac{M^3}{M_0^3}\right) + \frac{|\mathscr{E}_0|}{M_0}M. \tag{3}$$

Постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы при $M = M_0$ было $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$, где M_0 и $\mathscr{E}_0$ — начальные значения момента и энергии частиц.

«Падению» частиц друг на друга соответствует $M \to 0$. Из (3) видно, что при этом, как и следовало, $\mathscr{E} \to -\infty$.

Заметим, что произведение $|\mathscr{E}|M^2$ стремится к $\mu\alpha^2/2$ и из формулы (70,3) видно, что эксцентриситет $\varepsilon \to 0$, т. е. по мере сближения частиц орбита приближается к окружности. Подставляя (3) в (2), определяем производную dt/dM, выраженную как функция от M, после чего интегрирование по dM в пределах от M_0 до нуля дает время падения:

$$t_{\text{пад}} = \frac{c^3M_0^5}{\simeq\sqrt{2\,|\mathscr{E}_0|}\,\mu^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left(\sqrt{\mu\alpha^2} + \sqrt{2M_0^2|\mathscr{E}_0|}\right)^{-2}.$$

§ 76. Торможение излучением в релятивистском случае

Выведем релятивистское выражение для торможения излучением (для одного заряда), применимое и при движении со скоростями порядка скорости света. Эта сила будет теперь 4-вектором g^i, которым надо дополнить уравнение движения заряда, написанное в четырехмерном виде:

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k + g^i. \tag{76,1}$$

Для определения g^i заметим, что при $v \ll c$ его три пространственные компоненты должны перейти в компоненты вектора $\mathbf{f}/c$ (75,8). Легко видеть, что этим свойством обладает 4-вектор $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$. Он, однако, не удовлетворяет тождеству $g^iu_i = 0$, которое имеет место для компонент всякого 4-вектора

силы. Для того чтобы удовлетворить этому условию, надо прибавить к написанному выражению некоторый дополнительный 4-вектор, составленный из 4-скорости u^i и ее производных. Три пространственные компоненты этого вектора должны обращаться в предельном случае $v = 0$ в нуль так, чтобы не изменить правильного значения $\mathbf{f}$, которое уже дается выражением $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^l}{ds^2}$. Этим свойством обладает 4-вектор u^i, и потому искомый дополнительный член должен иметь вид αu^i. Скаляр α надо выбрать так, чтобы удовлетворить соотношению $g^i u_i = 0$. В результате находим:

$$g^i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \tag{76,2}$$

Полученную формулу можно переписать в другом виде, выразив согласно уравнениям движения производные d^2u^i/ds^2 через тензор действующего на частицу внешнего электромагнитного поля:

$$\frac{du^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^{ik}u_k, \qquad \frac{d^2u^l}{ds^2} = \frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_k u^l + \frac{e^2}{m^2c^4}F^{ik}F_{kl}u^l.$$

При подстановке надо иметь в виду, что произведение антисимметричного по индексам i, k тензора $\partial F^{ik}/\partial x^l$ на симметричный тензор $u_i u_k$ дает нуль. Итак,

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_k u^l - \frac{2e^4}{3m^2c^5}F^{il}F_{kl}u^k + \frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)u^i. \tag{76,3}$$

Интеграл от 4-силы g^i, взятый по мировой линии движения заряда, пролетающего через заданное поле, должен совпасть (с обратным знаком) с полным излучением зарядом 4-импульса ΔP^i (подобно тому как среднее значение работы силы $\mathbf{f}$ в нерелятивистском случае совпадает с интенсивностью дипольного излучения — см. (75,6)). Легко убедиться в том, что это действительно так. Первый член в (76,2) при интегрировании обращается в нуль, поскольку на бесконечности частица не имеет ускорения, т. е. $du^i/ds = 0$. Второй член интегрируем по частям и получаем:

$$-\int g^i\,ds = \frac{2e^2}{3c}\int u^i u^k \frac{d^2u_k}{ds^2}\,ds = -\frac{2e^2}{3c}\int \frac{du_k}{ds}\frac{du^k}{ds}\,dx^l,$$

что в точности совпадает с (73,4).

Когда скорость частицы приближается к скорости света, в пространственных компонентах 4-вектора (76,3) наиболее быстро возрастает часть, происходящая от члена, содержащего тройные произведения компонент 4-скорости. Сохраняя поэтому лишь этот член в (76,3) и учитывая связь (9,18) между про-

странственными компонентами 4-вектора g^l и трехмерной силой $\mathbf{f}$, находим для последней:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{v}$. Следовательно, в этом случае сила $\mathbf{f}$ направлена против направления скорости частицы; выбирая последнее в качестве оси x и раскрывая четырехмерные выражения, получим:

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\,\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (76,4)$$

(везде, за исключением знаменателя, положено $v = c$). Мы видим, что для ультрарелятивистской частицы сила торможения пропорциональна квадрату ее энергии.

Обратим внимание на следующее интересное обстоятельство. В предыдущем параграфе было показано, что полученные выражения для торможения излучением применимы лишь в таких полях, величина которых в системе покоя частицы (система K_0) мала по сравнению с m^2c^4/e^3. Пусть F есть порядок величины внешнего поля в системе отсчета K, в которой частица движется со скоростью v. Тогда в системе K_0 поле имеет порядок величины $F/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (см. формулы преобразования в § 24). Поэтому F должно удовлетворять условию

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll 1. \qquad (76,5)$$

Между тем, отношение силы торможения (76,4) к внешней силе ($\sim eF$) по порядку величины есть

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

и мы видим, что соблюдение условия (76,5) не препятствует тому, что сила торможения может оказаться (при достаточно большой энергии частицы) большой по сравнению с обычной лоренцевой силой, действующей на заряд в электромагнитном поле[1]). Таким образом, для ультрарелятивистской частицы мо-

[1]) Подчеркнем, что этот результат, разумеется, ни в какой степени не противоречит произведенному выше выводу релятивистского выражения для 4-силы g^l, предполагавшему ее «малость» по сравнению с 4-силой $\frac{e}{c}F^{lk}u_k$. Достаточно соблюдения условия малости компонент одного 4-вектора по сравнению с другим хотя бы в одной системе отсчета; в силу релятивистской инвариантности получающиеся на основании такого предположения четырехмерные формулы будут автоматически справедливы и во всякой другой системе отсчета.

жет иметь место случай, когда торможение излучением является основной действующей на нее силой.

В этом случае потерю энергии (кинетической) частицей на единице длины ее пути можно считать равной одной только силе торможения f_x; имея в виду, что последняя пропорциональна квадрату энергии частицы, напишем:

$$-\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dx} = k(x)\,\mathscr{E}^2_{\text{кин}},$$

где посредством $k(x)$ обозначен зависящий от координаты x коэффициент, выражающийся согласно (76,4) через поперечные компоненты поля. Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кин}}} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{x} k(x)\,dx,$$

где $\mathscr{E}_0$ обозначает начальную энергию частицы (энергия при $x \to -\infty$). В частности, конечная энергия частицы $\mathscr{E}_1$ (после пролета частицы через поле) определяется формулой

$$\frac{1}{\mathscr{E}_1} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx.$$

Мы видим, что при $\mathscr{E}_0 \to \infty$ конечная энергия $\mathscr{E}_1$ стремится к постоянному, не зависящему от $\mathscr{E}_0$ пределу (*И. Я. Померанчук*, 1939). Отсюда следует, что после пролета через поле энергия частицы не может превышать значения $\mathscr{E}_{\text{кр}}$, определяемого равенством

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx$$

или, подставляя выражение для $k(x)$,

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \frac{2}{3m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]\,dx. \quad (76,6)$$

Задачи

1. Определить предельную энергию, которой может обладать частица после пролета через поле магнитного диполя $\mathfrak{m}$; вектор $\mathfrak{m}$ и направление движения лежат в одной плоскости.

Решение. Выбираем плоскость, проходящую через вектор $\mathfrak{m}$ и направление движения, в качестве плоскости xz, причем частица движется параллельно оси x на расстоянии ρ от нее. Для действующих на частицу поперечных компонент поля магнитного диполя имеем (см. (44,4)):

$$H_y = 0,$$

$$H_z = \frac{(3\mathfrak{m}\mathbf{r})\,z - \mathfrak{m}_z r^2}{r^5} = \frac{\mathfrak{m}}{(\rho^2 + x^2)^{5/2}}\{3(\rho\cos\varphi + x\sin\varphi)\,\rho - (\rho^2 + x^2)\cos\varphi\}$$

(φ — угол между $\mathbf{m}$ и осью z). Подставляя в (76,6) и производя интегрирование, получим:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \frac{\mathbf{m}^2\pi}{64m^2c^4\rho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (15 + 26\cos^2\varphi).$$

2. Написать трехмерное выражение для силы торможения в релятивистском случае.

Решение. Вычисляя пространственные компоненты 4-вектора (76,3), получим.

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\} +$$
$$+ \frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{[\mathbf{EH}] + \frac{1}{c}[\mathbf{H}[\mathbf{Hv}]] + \frac{1}{c}\mathbf{E}(\mathbf{vE})\right\} -$$
$$- \frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2\right\}.$$

§ 77. Спектральное разложение излучения в ультрарелятивистском случае

Выше (§ 73) было показано, что излучение ультрарелятивистской частицы направлено в основном вперед, вдоль скорости частицы: оно почти целиком заключено в малом интервале углов

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

вокруг направления $\mathbf{v}$.

Для вычисления спектрального разложения излучения существенно взаимоотношение между величиной этого интервала и полным углом отклонения α частицы при пролете через внешнее электромагнитное поле.

Угол α может быть оценен следующим образом. Поперечное (к направлению движения) изменение импульса частицы порядка величины произведения поперечной силы eF [1]) на время пролета через поле $t \sim a/v \approx a/c$ (где a — расстояние, на котором поле заметно отлично от нуля). Отношение этой величины к импульсу

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и определит порядок величины малого угла α:

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

[1]) Если выбрать ось x вдоль направления движения частицы, то $(eF)^2$ есть сумма квадратов y- и z-составляющих лоренцевой силы $e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$, в которой можно при этом положить $v \approx c$:

$$F^2 = (E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2.$$