(φ — угол между $\mathbf{m}$ и осью z). Подставляя в (76,6) и производя интегрирование, получим:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \frac{\mathbf{m}^2\pi}{64m^2c^4\rho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (15 + 26\cos^2\varphi).$$

2. Написать трехмерное выражение для силы торможения в релятивистском случае.

Решение. Вычисляя пространственные компоненты 4-вектора (76,3), получим.

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\} +$$
$$+ \frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{[\mathbf{EH}] + \frac{1}{c}[\mathbf{H}[\mathbf{Hv}]] + \frac{1}{c}\mathbf{E}(\mathbf{vE})\right\} -$$
$$- \frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2\right\}.$$

§ 77. Спектральное разложение излучения в ультрарелятивистском случае

Выше (§ 73) было показано, что излучение ультрарелятивистской частицы направлено в основном вперед, вдоль скорости частицы: оно почти целиком заключено в малом интервале углов

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

вокруг направления $\mathbf{v}$.

Для вычисления спектрального разложения излучения существенно взаимоотношение между величиной этого интервала и полным углом отклонения α частицы при пролете через внешнее электромагнитное поле.

Угол α может быть оценен следующим образом. Поперечное (к направлению движения) изменение импульса частицы порядка величины произведения поперечной силы eF [1]) на время пролета через поле $t \sim a/v \approx a/c$ (где a — расстояние, на котором поле заметно отлично от нуля). Отношение этой величины к импульсу

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и определит порядок величины малого угла α:

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

---

[1]) Если выбрать ось x вдоль направления движения частицы, то $(eF)^2$ есть сумма квадратов y- и z-составляющих лоренцевой силы $e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$, в которой можно при этом положить $v \approx c$:

$$F^2 = (E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2.$$

Разделив его на $\Delta\theta$, найдем:

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}. \tag{77,1}$$

Обратим внимание на то, что это отношение не зависит от скорости частицы и целиком определяется свойствами самого внешнего поля.

Предположим сначала, что

$$eFa \gg mc^2, \tag{77,2}$$

т. е. полный угол отклонения частицы велик по сравнению с $\Delta\theta$. Тогда мы можем утверждать, что излучение в заданном направлении происходит в основном с того участка траектории, на котором скорость частицы почти параллельна этому направлению (образует с ним угол в интервале $\Delta\theta$) и длина этого участка мала по сравнению с a. На таком участке поле F можно считать постоянным и поскольку малый участок кривой можно рассматривать как отрезок окружности, то мы можем применить результаты, полученные в § 74 для излучения при равномерном движении по окружности (заменив при этом H на F). В частности, можно утверждать, что основная часть излучения будет сосредоточена в области частот

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{77,3}$$

(см. (74,16)).

В обратном предельном случае

$$eFa \ll mc^2 \tag{77,4}$$

полный угол отклонения частицы мал по сравнению с $\Delta\theta$. В этом случае все излучение происходит в основном в один узкий интервал углов $\Delta\theta$ вокруг направления движения, определяясь при этом всей траекторией частицы.

Для вычисления спектрального разложения интенсивности в этом случае удобно исходить из выражения для поля в волновой зоне излучения в форме Лиенара — Вихерта (73,8). Вычислим компоненту Фурье

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t}\, dt.$$

Выражение в правой стороне формулы (73,8) есть функция запаздывающего момента времени t', определяющегося из условия $t' = t - R(t')/c$. На больших расстояниях от частицы, движущейся с почти постоянной скоростью $\mathbf{v}$, имеем:

$$t' \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{nr}(t') \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{nv}t'$$

($\mathbf{r}=\mathbf{r}(t')\approx \mathbf{v}t'$ — радиус-вектор частицы), или

$$t=t'\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)+\frac{R_0}{c}.$$

Интегрирование по dt заменяем интегрированием по dt', положив

$$dt=\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)dt',$$

и получаем:

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}(t')\right]\right]e^{i\omega t'\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)}dt'.$$

Скорость $\mathbf{v}$ рассматривается здесь везде как постоянная величина; переменным является лишь ускорение $\mathbf{w}(t')$. Введя обозначение

$$\omega'=\omega\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right) \tag{77,5}$$

и соответствующую этой частоте компоненту Фурье ускорения, напишем $\mathbf{E}_\omega$ в виде

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right].$$

Наконец, согласно (66,9), находим окончательно для энергии, излученной в телесный угол do с частотой в $d\omega$:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=\frac{e^2}{2\pi c^3}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^4\left|\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right]\right|^2 do\,\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{77,6}$$

Оценку порядка величины частот, в области которых сосредоточена основная часть излучения в случае (77,4), легко сделать, заметив, что компонента Фурье $\mathbf{w}_{\omega'}$ заметно отлична от нуля лишь, если время $1/\omega'$ или, что то же,

$$\frac{1}{\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

будет того же порядка, что и время $a/v\sim a/c$, в течение которого заметным образом меняется ускорение частицы. Поэтому находим:

$$\omega\sim\frac{c}{a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{77,7}$$

Зависимость этих частот от энергии такая же, как и в (77,3), но коэффициент иной.

В произведенном (для обоих случаев (77,2) и (77,4)) исследовании подразумевалось, что полная потеря энергии частицей

при ее прохождении через поле относительно мала. Покажем теперь, что к первому из рассмотренных случаев приводится также вопрос об излучении ультрарелятивистской частицей, полная потеря энергии которой сравнима с ее первоначальной энергией.

Потерю энергии частицей в поле можно определить как работу силы лоренцева трения. Работа силы (76,4) на пути $\sim a$ есть, по порядку величины,

$$af \sim \frac{e^4F^2a}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Для того чтобы она оказалась сравнимой с полной энергией частицы $mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$, поле должно существовать на расстояниях

$$a \sim \frac{m^3c^6}{e^4F^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Но тогда автоматически соблюдается условие (77,2):

$$aeF \sim \frac{m^3c^6}{e^3F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \gg mc^2,$$

поскольку поле F во всяком случае должно удовлетворять условию (76,5), без которого вообще не может применяться обычная электродинамика.

Задачи

1. Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) интенсивности излучения при условии (77,2).

Решение. Излучение с каждого элемента длины траектории определяется формулой (74,13), в которой надо заменить H на значение F поперечной силы в данной точке и, кроме того, надо перейти от дискретного спектра частот к непрерывному. Этот переход осуществляется формальным умножением на dn и заменой

$$I_n\,dn = I_n\frac{dn}{d\omega}\,d\omega = I_n\frac{d\omega}{\omega_0}.$$

Интегрируя затем интенсивность по всему времени, найдем спектральное распределение полного излучения в следующем виде:

$$d\mathscr{E}_\omega = -\,d\omega\,\frac{2e^2\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Phi'(u)}{u}+\frac{1}{2}\int\limits_{u}^{\infty}\Phi(u)\,du\right]dt,$$

где $\Phi(u)$ — функция Эйри от аргумента

$$u=\left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{2/3}.$$

Подынтегральное выражение зависит от переменной интегрирования t неявным образом через величину u (F, а с ним и u, меняются вдоль траектории частицы; при заданном движении это изменение можно рассматривать как зависимость от времени).

2. Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) излученной энергии при условии (77,4).

Решение. Имея в виду, что основную роль играет излучение под малыми углами к направлению движения, пишем:

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx \omega\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right).$$

Интегрирование выражения (77,6) по углам $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \approx \theta\, d\theta\, d\varphi$ заменяем интегрированием по $d\varphi\, d\omega'/\omega$. При раскрытии квадрата двойного векторного произведения в (77,6) следует иметь в виду, что в ультрарелятивистском случае продольная составляющая ускорения мала по сравнению с поперечной (в отношении $1 - v^2/c^2$) и в данном случае с достаточной степенью точности можно считать $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ взаимно перпендикулярными. В результате получим для спектрального распределения полного излучения следующую формулу:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2\omega\, d\omega}{2\pi c^3} \int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty} \frac{|\mathbf{w}_{\omega'}|^2}{\omega'^2}\left[1 - \frac{\omega}{\omega'}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2\right] d\omega'.$$

§ 78. Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит *рассеяние* первоначальной волны.

Рассеяние удобно характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени к плотности потока энергии падающего на систему излучения. Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным сечением* (или просто *сечением*) *рассеяния*.

Пусть dI есть энергия, излучаемая системой в телесный угол do (в 1 с) при падении на нее волны с вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Тогда сечение рассеяния (в телесный угол do) равно

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \tag{78,1}$$

(черта над буквой означает усреднение по времени). Интеграл от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное сечение рассеяния.

Рассмотрим рассеяние, производимое одним неподвижным свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Ее электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha).$$

Будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда