2. Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) излученной энергии при условии (77,4).

Решение. Имея в виду, что основную роль играет излучение под малыми углами к направлению движения, пишем:

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx \omega\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right).$$

Интегрирование выражения (77,6) по углам $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \approx \theta\, d\theta\, d\varphi$ заменяем интегрированием по $d\varphi\, d\omega'/\omega$. При раскрытии квадрата двойного векторного произведения в (77,6) следует иметь в виду, что в ультрарелятивистском случае продольная составляющая ускорения мала по сравнению с поперечной (в отношении $1 - v^2/c^2$) и в данном случае с достаточной степенью точности можно считать $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ взаимно перпендикулярными. В результате получим для спектрального распределения полного излучения следующую формулу:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2\omega\, d\omega}{2\pi c^3} \int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty} \frac{|\mathbf{w}_{\omega'}|^2}{\omega'^2}\left[1 - \frac{\omega}{\omega'}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2\right] d\omega'.$$

§ 78. Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит *рассеяние* первоначальной волны.

Рассеяние удобно характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени к плотности потока энергии падающего на систему излучения. Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным сечением* (или просто *сечением*) *рассеяния*.

Пусть dI есть энергия, излучаемая системой в телесный угол do (в 1 с) при падении на нее волны с вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Тогда сечение рассеяния (в телесный угол do) равно

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \tag{78,1}$$

(черта над буквой означает усреднение по времени). Интеграл от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное сечение рассеяния.

Рассмотрим рассеяние, производимое одним неподвижным свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Ее электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha).$$

Будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда

можно считать, что сила, действующая на заряд, равна $e\mathbf{E}$, а силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ со стороны магнитного поля можно пренебречь. В этом случае можно также пренебречь влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием поля. Если заряд совершает колебания около начала координат, то можно тогда считать, что на него все время действует то поле, которое имеется в начале координат, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Поскольку уравнения движения заряда гласят

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а его дипольный момент $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, то

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{78,2}$$

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулой (67,7) для дипольного излучения; мы имеем право сделать это, поскольку приобретаемая зарядом скорость предполагается малой. Заметим также, что частота излучаемой зарядом (т. е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны.

Подставляя (78,2) в (67,7), находим:

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}[\mathbf{En}']^2 do, \tag{78,3}$$

где $\mathbf{n}'$ — единичный вектор в направлении рассеяния. С другой стороны, вектор Пойнтинга падающей волны равен

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Отсюда находим сечение рассеяния в телесный угол do:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{78,4}$$

где θ — угол между направлением рассеяния и направлением электрического поля $\mathbf{E}$ падающей волны. Мы видим, что сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты.

Определим полное сечение σ. Для этого выберем направление $\mathbf{E}$ в качестве полярной оси; тогда $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и, интегрируя по $d\theta$ от 0 до π и по $d\varphi$ от 0 до 2π, находим:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \tag{78,5}$$

(так называемая *формула Томсона*).

Наконец, вычислим дифференциальное сечение $d\sigma$ в случае, когда падающая волна не поляризована (естественный свет),

Для этого мы должны усреднить (78,4) по всем направлениям вектора **E** в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны (направлению волнового вектора **k**). Обозначив через **e** единичный вектор в направлении **E**, пишем:

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \overline{(\mathbf{n}'\mathbf{e})^2} = 1 - n'_\alpha n'_\beta \overline{e_\alpha e_\beta}.$$

Усреднение осуществляется формулой [1])

$$\overline{e_\alpha e_\beta} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \tag{78,6}$$

и дает

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\mathbf{n}'\mathbf{k})^2}{k^2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta),$$

где ϑ — угол между направлениями падающей и рассеянной волн (угол рассеяния). Таким образом, искомое сечение рассеяния неполяризованной волны свободным зарядом:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta)\, do. \tag{78,7}$$

Наличие рассеяния приводит к появлению некоторой силы, действующей на рассеивающую частицу. В этом легко убедиться из следующих соображений. Падающая на частицу волна теряет в среднем в единицу времени энергию $c\overline{W}\sigma$, где $\overline{W}$ — средняя плотность энергии, а σ — полное сечение рассеяния. Поскольку импульс поля равен его энергии, деленной на скорость света, то падающая волна теряет при этом импульс, равный по величине $\overline{W}\sigma$. С другой стороны, в системе отсчета, в которой заряд совершает лишь малые колебания под влиянием силы $e\mathbf{E}$, и его скорость v поэтому мала, полный поток импульса в рассеянной волне равен, с точностью до членов высшего порядка по v/c, нулю (в § 73 было указано, что в системе отсчета, в которой $v = 0$, излучения импульса частицей не происходит). Поэтому весь теряемый падающей волной импульс «поглощается» рассеивающей частицей. Средняя действующая на частицу сила $\overline{\mathbf{f}}$ равна средней величине поглощаемого в единицу времени импульса, т. е.

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma\overline{W}\mathbf{n} \tag{78,8}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения падающей волны). Отметим, что средняя сила оказывается величиной второго порядка по отношению к полю падающей волны, в то

---

[1]) Действительно, $\overline{e_\alpha e_\beta}$ есть симметричный тензор с равным 1 следом, дающий нуль при умножении на k_α ввиду перпендикулярности **e** и **k**. Этим условиям и удовлетворяет написанное выражение.

время как «мгновенная» сила (главная часть которой есть $e\mathbf{E}$) — первого порядка по отношению к полю.

Формулу (78,8) можно получить и непосредственно, усредняя силу торможения (75,10). Первый член, пропорциональный $\dot{\mathbf{E}}$, при усреднении обращается в нуль (как и среднее значение основной силы $e\mathbf{E}$). Второй же член дает:

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}\,\overline{E^2\mathbf{n}} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{\overline{E^2}}{4\pi}\,\mathbf{n},$$

что ввиду (78,5) совпадает с (78,8).

Задачи

1. Определить сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны свободным зарядом.

Решение. Поле волны имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B}\sin(\omega t + \alpha)$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — взаимно перпендикулярные векторы (см. § 48). Аналогично выводу, проделанному в тексте, находим:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{[\mathbf{An}']^2 + [\mathbf{Bn}']^2}{A^2 + B^2}\,do.$$

2. Определить сечение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, совершающим (под влиянием некоторой упругой силы) малые колебания (так называемым осциллятором).

Решение. Уравнение движения заряда в падающей на него волне $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha)$ есть

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha),$$

где ω_0 — частота его свободных колебаний. Для вынужденных колебаний имеем отсюда:

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0\cos(\omega t + \alpha)}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}.$$

Определяя отсюда $\ddot{\mathbf{d}}$, находим:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}\sin^2\theta\,do$$

(θ — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}'$).

3. Определить полное сечение рассеяния света электрическим диполем, представляющим собой в механическом отношении ротатор. Частота волны ω предполагается большой по сравнению с частотой Ω_0 свободного вращения ротатора.

Решение. При условии $\omega \gg \Omega_0$ собственным вращением ротатора можно пренебречь и рассматривать только вынужденное вращение под влиянием момента сил $[\mathbf{dE}]$, действующего на него со стороны рассеиваемой волны. Уравнение этого движения: $J\dot{\mathbf{\Omega}} = [\mathbf{dE}]$, где J — момент инерции ротатора, а $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения. Изменение же вектора дипольного момента при его вращении без изменения абсолютной величины дается формулой $\dot{\mathbf{d}} = [\mathbf{\Omega d}]$. Из этих двух уравнений находим (опуская член, квадратичный по малой величине $\mathbf{\Omega}$):

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{J}[[\mathbf{dE}]\,\mathbf{d}] = \frac{1}{J}\{\mathbf{E}d^2 - (\mathbf{Ed})\,\mathbf{d}\}.$$

Предполагая все ориентации диполя в пространстве равновероятными и усредняя $\ddot{\mathbf{d}}^2$ по ним, получим в результате полное сечение в виде

$$\sigma = \frac{16\pi d^4}{9c^4 J^2}.$$

4. Определить коэффициент деполяризации рассеянного света при рассеянии естественного света свободным зарядом.

Решение. Из соображений симметрии очевидно, что две некогерентные поляризованные компоненты рассеянного света (см. § 50) будут поляризованы линейно: одна в плоскости рассеяния (плоскость, проходящая через падающий и рассеянный лучи), а другая — перпендикулярно к этой плоскости. Интенсивности этих компонент определяются составляющими поля падающей волны в плоскости рассеяния ($\mathbf{E}_\parallel$) и перпендикулярно к ней ($\mathbf{E}_\perp$) и, согласно (78,3), пропорциональны соответственно $[\mathbf{E}_\parallel \mathbf{n}']^2 = E_\parallel^2 \cos^2\vartheta$ и $[\mathbf{E}_\perp \mathbf{n}']^2 = E_\perp^2$ (ϑ — угол рассеяния). Поскольку для естественного падающего света $\overline{E_\parallel^2} = \overline{E_\perp^2}$, то коэффициент деполяризации (см. примечание на стр. 166)

$$\rho = \cos^2\vartheta.$$

5. Определить частоту (ω') света, рассеянного движущимся зарядом.

Решение. В системе координат, где заряд покоится, частота света при рассеянии не меняется ($\omega = \omega'$). В инвариантной форме это соотношение можно написать в виде

$$k_i' u'^i = k_i u^i,$$

где u^i — 4-скорость заряда. Отсюда без труда получаем:

$$\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right) = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

где θ и θ' — углы, составляемые падающей и рассеянной волной с направлением движения (v — скорость заряда).

6. Определить угловое распределение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, движущимся с произвольной скоростью v в направлении распространения волны.

Решение. Скорость частицы $\mathbf{v}$ перпендикулярна к полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ падающей волны, а потому перпендикулярна и к приобретаемому частицей ускорению $\mathbf{w}$. Интенсивность рассеяния определяется формулой (73,14), в которой ускорение $\mathbf{w}$ надо выразить через поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно формуле, полученной в задаче к § 17. Разделив интенсивность dI на вектор Пойнтинга падающей волны, найдем следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^6}\left[\left(1 - \frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta\right] do,$$

где теперь θ и φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}'$ относительно системы координат с осью z вдоль направления $\mathbf{E}$ и осью x вдоль $\mathbf{v}$ ($\cos(\mathbf{n}', \mathbf{E}) = \cos\theta$, $\cos(\mathbf{n}', \mathbf{v}) = \sin\theta\cos\varphi$).

7. Определить движение заряда под влиянием средней силы, действующей на него со стороны рассеиваемой им волны.

Решение. Сила (78,8), а потому и скорость рассматриваемого движения направлены вдоль распространения падающей волны (ось x). Во вспомогательной системе отсчета K_0, в которой заряд покоится (напоминаем,

что речь идет о движении, усредненном по периоду малых колебаний), действующая на него сила равна $\sigma\overline{W}_0$, а приобретаемое им под влиянием этой силы ускорение

$$w_0 = \frac{\sigma}{m}\overline{W}_0$$

(индекс нуль относится к величинам в системе отсчета K_0). Преобразование же к исходной системе отсчета K (в которой заряд движется со скоростью v) осуществляется формулой, полученной в задаче к § 7, и формулой (47,7) и дает:

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = \frac{\overline{W}\sigma}{m}\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{\overline{W}\sigma}{mc}t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} - \frac{2}{3},$$

чем и определяется в неявном виде скорость $v = dx/dt$ как функция времени (постоянная интегрирования выбрана так, что $v = 0$ при $t = 0$).

8. Определить сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором, с учетом торможения излучением.

Решение. Уравнение движения заряда в падающей волне пишем в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

В силе торможения можно подставить приближенно $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$; тогда получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

где $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. Отсюда находим:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

§ 79. Рассеяние волн с малыми частотами

Рассеяние электромагнитных волн системой зарядов отличается от рассеяния одним (неподвижным) зарядом прежде всего тем, что благодаря наличию собственного движения зарядов в системе частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Именно, в спектральное разложение рассеянного излучения входят наряду с частотой ω