что речь идет о движении, усредненном по периоду малых колебаний), действующая на него сила равна $\sigma\overline{W}_0$, а приобретаемое им под влиянием этой силы ускорение

$$w_0 = \frac{\sigma}{m}\overline{W}_0$$

(индекс нуль относится к величинам в системе отсчета K_0). Преобразование же к исходной системе отсчета K (в которой заряд движется со скоростью v) осуществляется формулой, полученной в задаче к § 7, и формулой (47,7) и дает:

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = \frac{\overline{W}\sigma}{m}\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{\overline{W}\sigma}{mc}t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} - \frac{2}{3},$$

чем и определяется в неявном виде скорость $v = dx/dt$ как функция времени (постоянная интегрирования выбрана так, что $v = 0$ при $t = 0$).

8. Определить сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором, с учетом торможения излучением.

Решение. Уравнение движения заряда в падающей волне пишем в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

В силе торможения можно подставить приближенно $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$; тогда получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

где $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. Отсюда находим:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

§ 79. Рассеяние волн с малыми частотами

Рассеяние электромагнитных волн системой зарядов отличается от рассеяния одним (неподвижным) зарядом прежде всего тем, что благодаря наличию собственного движения зарядов в системе частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Именно, в спектральное разложение рассеянного излучения входят наряду с частотой ω

падающей волны также и частоты ω', отличающиеся от ω на любую из собственных частот движения рассеивающей системы. Рассеяние с изменением частоты называют *некогерентным* (или *комбинационным*) в противоположность *когерентному* рассеянию без изменения частоты.

Предполагая поле падающей волны слабым, мы можем представить плотность тока в виде $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}_0$ — плотность тока в отсутствие внешнего поля, а $\mathbf{j}'$ — изменение тока под влиянием падающей волны. Соответственно этому векторный потенциал (и другие величины) поля системы тоже будут иметь вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ определяются точками $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{j}'$; потенциал $\mathbf{A}'$ описывает рассеянную системой волну.

Рассмотрим рассеяние волны, частота ω которой мала по сравнению со всеми собственными частотами системы. Рассеяние будет состоять как из когерентной, так и из некогерентной части, но мы будем рассматривать здесь только когерентное рассеяние.

Для вычисления поля рассеянной волны, при достаточно малой частоте ω, всегда можно пользоваться тем разложением запаздывающих потенциалов, которое было произведено в §§ 67 и 71, даже если скорости частиц в системе и не малы по сравнению со скоростью света. Действительно, для законности указанного разложения интеграла

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}'_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}'}{c}} \, dV \tag{79,1}$$

необходимо лишь, чтобы время $\mathbf{rn}'/c \sim a/c$ было мало по сравнению со временем $\sim 1/\omega$; при достаточно малых ω ($\omega \ll c/a$) это условие выполняется независимо от величины скоростей частиц в системе.

Первые члены разложения дают:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0} \{ [\ddot{\mathbf{d}}'\mathbf{n}'] + [[\ddot{\mathbf{m}}'\mathbf{n}']\,\mathbf{n}'] \},$$

где $\mathbf{d}'$, $\mathbf{m}'$ — части дипольного и магнитного моментов системы, которые создаются падающим на систему рассеиваемым излучением. Следующие члены разложения содержат производные по времени более высокого порядка, чем второго, и мы их опускаем.

Компонента $\mathbf{H}'_\omega$ спектрального разложения поля рассеянной волны с частотой, равной частоте падающего излучения, определится этой же формулой, в которой надо вместо всех величин подставить их компоненты Фурье: $\ddot{\mathbf{d}}'_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}'_\omega$, $\ddot{\mathbf{m}}'_\omega = -\omega^2 \mathbf{m}'_\omega$. Тогда получаем:

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2 R_0} \{ [\mathbf{n}'\mathbf{d}'_\omega] + [\mathbf{n}'[\mathbf{m}'_\omega \mathbf{n}']] \}. \tag{79,2}$$

Следующие члены разложения поля дали бы величины, пропорциональные более высокой степени малой частоты. Если скорости всех частиц в системе малы ($v \ll c$), то в (79,1) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, поскольку магнитный момент содержит отношение v/c. Тогда

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2 R_0}\omega^2 [\mathbf{n}'\mathbf{d}'_\omega]. \tag{79,3}$$

Если полный заряд системы равен нулю, то при $\omega \to 0$ $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ стремятся к постоянным пределам (если бы сумма зарядов была отлична от нуля, то при $\omega = 0$, т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое). Поэтому при малых ω ($\omega \ll v/a$) можно считать $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ не зависящими от частоты, так что поле рассеянной волны пропорционально квадрату частоты. Интенсивность же ее, следовательно, пропорциональна ω^4. Таким образом, при рассеянии волн с малой частотой сечение когерентного рассеяния пропорционально четвертой степени частоты падающего излучения [1]).

§ 80. Рассеяние волн с большими частотами

Рассмотрим теперь рассеяние волн системой зарядов в обратном случае, когда частота ω волны велика по сравнению с основными собственными частотами системы. Последние имеют порядок величины $\omega_0 \sim v/a$, так что ω должно удовлетворять условию

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \tag{80,1}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что скорости зарядов в системе малы ($v \ll c$).

Согласно условию (80,1) период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение промежутков времени порядка периода волны движение зарядов в системе можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн можно не учитывать взаимодействия зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости $\mathbf{v}'$, приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})},$$

---

[1]) Этот результат фактически справедлив для рассеяния света не только нейтральными атомами, но и ионами. Благодаря большой массе ядра рассеянием, происходящим от движения иона как целого, можно пренебречь.