Следующие члены разложения поля дали бы величины, пропорциональные более высокой степени малой частоты. Если скорости всех частиц в системе малы ($v \ll c$), то в (79,1) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, поскольку магнитный момент содержит отношение v/c. Тогда

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2 R_0}\omega^2 [\mathbf{n}'\mathbf{d}'_\omega]. \tag{79,3}$$

Если полный заряд системы равен нулю, то при $\omega \to 0$ $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ стремятся к постоянным пределам (если бы сумма зарядов была отлична от нуля, то при $\omega = 0$, т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое). Поэтому при малых ω ($\omega \ll v/a$) можно считать $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ не зависящими от частоты, так что поле рассеянной волны пропорционально квадрату частоты. Интенсивность же ее, следовательно, пропорциональна ω^4. Таким образом, при рассеянии волн с малой частотой сечение когерентного рассеяния пропорционально четвертой степени частоты падающего излучения [1]).

§ 80. Рассеяние волн с большими частотами

Рассмотрим теперь рассеяние волн системой зарядов в обратном случае, когда частота ω волны велика по сравнению с основными собственными частотами системы. Последние имеют порядок величины $\omega_0 \sim v/a$, так что ω должно удовлетворять условию

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \tag{80,1}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что скорости зарядов в системе малы ($v \ll c$).

Согласно условию (80,1) период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение промежутков времени порядка периода волны движение зарядов в системе можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн можно не учитывать взаимодействия зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости $\mathbf{v}'$, приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})},$$

---

[1]) Этот результат фактически справедлив для рассеяния света не только нейтральными атомами, но и ионами. Благодаря большой массе ядра рассеянием, происходящим от движения иона как целого, можно пренебречь.

где $\mathbf{k}=\omega\mathbf{n}/c$ — волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор заряда является, конечно, функцией времени. В показателе экспоненциального множителя с правой стороны этого уравнения скорость изменения первого члена со временем велика по сравнению со скоростью изменения второго (первая равна ω, а вторая — порядка $kv \sim v\omega/c \ll \omega$). Поэтому при интегрировании уравнений движения можно считать в правой их части $\mathbf{r}$ постоянным. Тогда

$$\mathbf{v}'=-\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}. \tag{80,2}$$

Для векторного потенциала рассеянной волны (на больших расстояниях от системы) имеем согласно (79,1):

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{cR_0}\sum(e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}'}{c}},$$

где сумма берется по всем зарядам системы. Подставляя сюда (80,2), находим:

$$\mathbf{A}'=-\frac{1}{icR_0\omega}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\mathbf{E}_0\sum\frac{e^2}{m}e^{-i\mathbf{qr}}, \tag{80,3}$$

где $\mathbf{q}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}$ есть разность между волновым вектором рассеянной $\mathbf{k}'=\omega\mathbf{n}'/c$ и волновым вектором $\mathbf{k}=\omega\mathbf{n}/c$ падающей волн [1]). Значение суммы в (80,3) должно браться в момент времени $t'=t-R_0/c$, так как изменением $\mathbf{r}$ за время $\mathbf{rn}'/c$ можно пренебречь ввиду предполагаемой малости скоростей частиц (индекс t', как обычно, для краткости опускаем). Абсолютная величина вектора $\mathbf{q}$ равна

$$q=2\frac{\omega}{c}\sin\frac{\vartheta}{2}, \tag{80,4}$$

где ϑ — угол рассеяния.

При рассеянии на атоме (или молекуле) в сумме в (80,3) можно пренебречь членами, соответствующими ядрам, ввиду большой величины их масс по сравнению с массами электронов. Ниже мы будем иметь в виду именно этот случай, соответственно чему вынесем множитель e^2/m за знак суммы, понимая в нем под e и m заряд и массу электрона.

Для поля $\mathbf{H}'$ рассеянной волны находим согласно (66,3):

$$\mathbf{H}'=\frac{[\mathbf{E}_0\mathbf{n}']}{c^2R_0}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\frac{e^2}{m}\sum e^{-i\mathbf{qr}}. \tag{80,5}$$

Поток энергии в элемент телесного угла в направлении $\mathbf{n}'$ равен

$$\frac{c\,|\mathbf{H}'|^2}{8\pi}R_0^2\,do=\frac{e^4}{8\pi c^3m^2}[\mathbf{n}'\mathbf{E}_0]^2\left|\sum e^{-i\mathbf{qr}}\right|^2 do.$$

---

[1]) Строго говоря, волновой вектор $\mathbf{k}'=\omega'\mathbf{n}'/c$, где частота ω' рассеянной волны может отличаться от ω. Разностью $\omega'-\omega\sim\omega_0$ можно, однако, пренебречь в рассматриваемом случае больших частот.

Разделив это на поток энергии $c|\mathbf{E}_0|^2/8\pi$ падающей волны и вводя угол θ между направлением поля $\mathbf{E}$ падающей волны и направлением рассеяния, находим окончательно сечение рассеяния в виде

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \overline{\left|\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\right|^2} \sin^2\theta\, do. \tag{80,6}$$

Черта обозначает усреднение по времени, т. е. усреднение по движению зарядов в системе; оно производится ввиду того, что рассеяние наблюдается в промежутки времени, большие по сравнению с периодом движения зарядов в системе.

Для длины волны падающего излучения из условия (80,1) следует неравенство $\lambda \ll ac/v$. Что же касается относительной величины λ и a, то возможны оба предельных случая $\lambda \gg a$ и $\lambda \ll a$. В обоих этих случаях общая формула (80,6) значительно упрощается.

При $\lambda \gg a$ в выражении (80,6) $\mathbf{q}\mathbf{r} \ll 1$, поскольку $q \sim 1/\lambda$, $r \sim a$. Заменяя соответственно этому $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ единицей, имеем:

$$d\sigma = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{80,7}$$

т. е. рассеяние пропорционально квадрату числа Z электронов в атоме.

Перейдем к случаю $\lambda \ll a$. В квадрате суммы в (80,6) наряду с равными единице квадратами модуля каждого из членов имеются произведения вида $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$. При усреднении по движению зарядов, т. е. по их взаимным расположениям в системе, разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ пробегают значения в интервале порядка a. Поскольку $q \sim 1/\lambda$, $\lambda \ll a$, то экспоненциальный множитель $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$ является в этом интервале быстро осциллирующей функцией, и его среднее значение обращается в нуль. Таким образом, при $\lambda \ll a$ сечение рассеяния равно

$$d\sigma = Z \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{80,8}$$

т. е. пропорционально первой степени атомного номера. Заметим, что эта формула неприменима при малых углах рассеяния ($\theta \sim \lambda/a$), так как в этом случае $q \sim \theta/\lambda \sim 1/a$ и показатель $\mathbf{q}\mathbf{r}$ невелик по сравнению с единицей.

Для определения сечения когерентного рассеяния мы должны выделить ту часть поля рассеянной волны, которая имеет частоту ω. Выражение (80,5) для поля зависит от времени через множитель $e^{-i\omega t}$ и, кроме того, от времени зависит также сумма $\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$. Эта последняя зависимость и приводит к тому, что в поле рассеянной волны содержатся наряду с частотой ω еще и другие (хотя и близкие к ней) частоты. Та часть поля, которая обладает частотой ω (т. е. зависит от времени только посред-

ством множителя $e^{-i\omega t}$), получится, очевидно, если усреднить по времени сумму $\sum e^{-i\mathbf{qr}}$. Соответственно этому выражение для сечения когерентного рассеяния $d\sigma_{\text{ког}}$ отличается от полного сечения $d\sigma$ тем, что вместо среднего значения квадрата модуля суммы в нем стоит квадрат модуля среднего значения суммы:

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left|\overline{\sum e^{-i\mathbf{qr}}}\right|^2 \sin^2\theta\, do. \tag{80,9}$$

Полезно заметить, что это среднее значение суммы есть (с точностью до коэффициента) не что иное, как пространственная компонента Фурье от среднего распределения $\rho(\mathbf{r})$ плотности электрического заряда в атоме:

$$e\overline{\sum e^{-i\mathbf{qr}}} = \int \rho(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{qr}}\, dV = \rho_{\mathbf{q}}. \tag{80,10}$$

При $\lambda \gg a$ мы можем снова заменить $e^{-i\mathbf{qr}}$ единицей, так что

$$d\sigma_{\text{ког}} = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{80,11}$$

Сравнивая это с полным сечением (80,7), мы видим, что $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$, т. е. все рассеяние является когерентным.

Если же $\lambda \ll a$, то при усреднении в (80,9) все члены суммы (как средние значения быстро осциллирующих функций времени) исчезают, так что $d\sigma_{\text{ког}} = 0$. Таким образом, в этом случае рассеяние целиком некогерентно.