В общем случае произвольного переменного гравитационного поля метрика пространства не только неевклидова, но еще и меняется со временем. Это значит, что меняются со временем соотношения между различными геометрическими расстояниями. В результате взаимное расположение внесенных в поле «пробных частиц» ни в какой системе координат не может оставаться неизменным[1]). Так, если частицы расположены вдоль какой-либо окружности и вдоль ее диаметра, то поскольку отношение длины окружности к длине диаметра не равно π и меняется со временем, ясно, что если расстояния частиц вдоль диаметра остаются неизменными, то должны изменяться расстояния вдоль окружности, и наоборот. Таким образом, в общей теории относительности, вообще говоря, невозможна взаимная неподвижность системы тел.

Это обстоятельство существенно меняет само понятие системы отсчета в общей теории относительности по сравнению с тем смыслом, который оно имело в специальной теории. В последней под системой отсчета понималась совокупность покоящихся друг относительно друга, неизменным образом взаимно расположенных тел. При наличии переменного гравитационного поля таких систем тел не существует и для точного определения положения частицы в пространстве необходимо, строго говоря, иметь совокупность бесконечного числа тел, заполняющих все пространство, наподобие некоторой «среды». Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчета в общей теории относительности.

В связи с произвольностью выбора системы отсчета законы природы должны записываться в общей теории относительности в виде, формально пригодном в любой четырехмерной системе координат (или, как говорят, в *ковариантном* виде). Это обстоятельство, однако, разумеется не означает физической эквивалентности всех этих систем отсчета (подобной физической эквивалентности всех инерциальных систем отсчета в специальной теории). Напротив, конкретный вид физических явлений, в том числе свойства движения тел, во всех системах отсчета становится различным.

§ 83. Криволинейные координаты

Поскольку при изучении гравитационных полей приходится рассматривать явления в произвольных системах отсчета, то

[1]) Строго говоря, число частиц должно быть больше четырех. Поскольку из шести отрезков между четырьмя частицами можно построить четырехгранник, то должным определением системы отсчета всегда можно добиться того, чтобы система четырех частиц образовывала в ней неизменный четырехгранник. Тем более, можно определить взаимную неподвижность в системах трех или двух частиц.

возникает необходимость развить четырехмерную геометрию в форме, пригодной в произвольных координатах. Этому посвящены § 83, 85, 86.

Рассмотрим преобразование одной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 в другую x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

где f^i — некоторые функции. При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются согласно формулам

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \tag{83,1}$$

Контравариантным 4-вектором называется всякая совокупность четырех величин A^i, которые при преобразовании координат преобразуются как их дифференциалы:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \tag{83,2}$$

Пусть φ — некоторый скаляр. Производные $\partial\varphi/\partial x^i$ при преобразовании координат преобразуются согласно формулам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{83,3}$$

отличным от формул (83,2). *Ковариантным 4-вектором* называется всякая совокупность четырех величин A_i, которые при преобразовании координат преобразуются как производные от скаляра:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{83,4}$$

Аналогичным образом определяются 4-тензоры различных рангов. Так, контравариантным 4-тензором 2-го ранга A^{ik} называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведения двух контравариантных векторов, т. е. по закону

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \tag{83,5}$$

Ковариантный тензор 2-го ранга A_{ik} преобразуется по закону

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}, \tag{83,6}$$

а смешанный 4-тензор $A^i{}_k$ — по формулам

$$A^i{}_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l{}_m. \tag{83,7}$$

Данные определения являются естественным обобщением определений 4-векторов и 4-тензоров в галилеевых координатах (§ 6), согласно которым дифференциалы dx^i тоже составляют контравариантный, а производные $\partial\varphi/\partial x^i$ — ковариантный 4-вектор [1]).

Правила образования 4-тензоров путем перемножения или упрощения произведений других 4-тензоров остаются в криволинейных координатах теми же, что и в галилеевых координатах. Легко, например, убедиться в том, что в силу законов преобразования (83,2) и (83,4) скалярное произведение двух 4-векторов A^iB_i действительно инвариантно:

$$A^iB_i = \frac{\partial x^l}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A'^lB'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}A'^lB'_m = A'^lB'_l.$$

Определение единичного 4-тензора δ^i_k при переходе к криволинейным координатам не меняется: его компоненты снова $\delta^i_k = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ равны 1. Если A^k — 4-вектор, то при умножении на δ^i_k мы получим:

$$A^k\delta^i_k = A^i,$$

т. е. снова 4-вектор; этим и доказывается, что δ^i_k является тензором.

Квадрат элемента длины в криволинейных координатах есть квадратичная форма дифференциалов dx^i:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{83,8}$$

где g_{ik} — функции координат; g_{ik} симметричны по индексам i и k:

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{83,9}$$

Поскольку произведение (упрощенное) g_{ik} на контравариантный тензор dx^idx^k есть скаляр, то g_{ik} составляют ковариантный тензор; он называется *метрическим тензором*.

Два тензора A_{ik} и B^{ik} называются обратными друг другу, если

$$A_{ik}B^{kl} = \delta^l_i.$$

В частности, контравариантным метрическим тензором g^{ik} называется тензор, обратный тензору g_{ik}, т. е.

$$g_{ik}g^{kl} = \delta^l_i. \tag{83,10}$$

Одна и та же векторная физическая величина может быть представлена как в контра-, так и в ковариантных компонентах.

---

[1]) Но в то время как в галилеевой системе сами координаты x^i (а не только их дифференциалы) тоже составляют 4-вектор, в криволинейных координатах это, разумеется, не имеет места.

Очевидно, что единственными величинами, которые могут определять связь между теми и другими, являются компоненты метрического тензора. Такая связь дается формулами

$$A^i = g^{ik} A_k, \qquad A_i = g_{ik} A^k. \tag{83,11}$$

В галилеевой системе координат метрический тензор имеет компоненты:

$$g_{ik}^{(0)} = g^{ik\,(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{83,12}$$

При этом формулы (83,11) дают известную связь $A^0 = A_0$, $A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$ [1]).

Сказанное относится и к тензорам. Переход между различными формами одного и того же физического тензора совершается с помощью метрического тензора по формулам

$$A^i{}_k = g^{il} A_{lk}, \qquad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}$$

и т. п.

В § 6 был определен (в галилеевой системе координат) совершенно антисимметричный единичный псевдотензор e^{iklm}. Преобразуем его к произвольной криволинейной системе координат, причем обозначим его теперь через E^{iklm}. Обозначение же e^{iklm} сохраним для величин, определенных по-прежнему по значению $e^{0123} = 1$ (или $e_{0123} = -1$).

Пусть x'^i — галилеевы, а x^i — произвольные криволинейные координаты. Согласно общим правилам преобразования тензоров, имеем:

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} \frac{\partial x^l}{\partial x'^s} \frac{\partial x^m}{\partial x'^t} e^{prst},$$

или

$$E^{iklm} = J e^{iklm},$$

где J — определитель, составленный из производных $\partial x^i / \partial x'^p$, т. е. не что иное, как якобиан преобразования от галилеевых координат к криволинейным:

$$J = \frac{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}.$$

---

[1]) Везде, где при проведении аналогии мы пользуемся галилеевой системой координат, надо иметь в виду, что такую систему можно выбрать только в плоском 4-пространстве. В случае же кривого 4-пространства надо было бы говорить о системе координат, галилеевой в данном бесконечно малом элементе 4-объема, которую всегда можно выбрать. Все выводы от этого уточнения не меняются.

Этот якобиан можно выразить через определитель метрического тензора g_{ik} (в системе x^i). Для этого пишем формулу преобразования метрического тензора:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g^{lm\,(0)}$$

и приравниваем определители, составленные из величин, стоящих в обеих сторонах этого равенства. Определитель обратного тензора $|g^{ik}| = 1/g$. Определитель же $|g^{lm(0)}| = -1$. Поэтому имеем $1/g = -J^2$, откуда $J = 1/\sqrt{-g}$.

Таким образом, в криволинейных координатах антисимметричный единичный тензор 4-го ранга должен быть определен как

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}. \tag{83,13}$$

Опускание индексов у этого тензора осуществляется с помощью формулы

$$e^{prst} g_{ip} g_{kr} g_{ls} g_{mt} = -g e_{iklm},$$

так что его ковариантные компоненты

$$E_{iklm} = \sqrt{-g}\, e_{iklm}. \tag{83,14}$$

В галилеевой системе координат x'^i интеграл от скаляра по $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ тоже есть скаляр, т. е. элемент $d\Omega'$ ведет себя при интегрировании как скаляр (§ 6). При преобразовании к криволинейным координатам x^i элемент интегрирования $d\Omega'$ переходит в

$$d\Omega' \to \frac{1}{J} d\Omega = \sqrt{-g}\, d\Omega.$$

Таким образом, в криволинейных координатах при интегрировании по 4-объему ведет себя как инвариант произведение $\sqrt{-g}\, d\Omega$ [1]).

Все сказанное в конце § 6 относительно элементов интегрирования по гиперповерхности, поверхности и линии остается в силе и в криволинейных координатах, с тем только отличием, что несколько меняется определение дуальных тензоров. Элемент «площади» гиперповерхности, построенный на трех беско-

---

[1]) Если φ — скаляр, то величину $\sqrt{-g}\,\varphi$, дающую при интегрировании по $d\Omega$ инвариант, иногда называют *скалярной плотностью*. Аналогично говорят о *векторной* и *тензорной плотностях* $\sqrt{-g}\, A^i$, $\sqrt{-g}\, A^{ik}$ и т. д. Эти величины дают вектор или тензор при умножении на элемент 4-объема $d\Omega$ (интеграл же $\int A^i \sqrt{-g}\, d\Omega$ по конечной области, вообще говоря, не является вектором, так как законы преобразования вектора A^i в разных точках области различны).

нечно малых смещениях, есть контравариантный антисимметричный тензор dS^{ikl}; дуальный ему вектор получается при умножении на тензор $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$, т. е. равен

$$\sqrt{-g}\,dS_i = -\frac{1}{6}e_{iklm}\,dS^{klm}\sqrt{-g}. \qquad (83,15)$$

Аналогично, если df^{ik} есть элемент поверхности (двухмерной), построенный на двух бесконечно малых смещениях, то дуальный ему тензор определяется как[1])

$$\sqrt{-g}\,df^*_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,e_{iklm}\,df^{lm}. \qquad (83,16)$$

Мы оставляем здесь обозначения dS_i и df^*_{ik}, как и прежде, соответственно для $\frac{1}{6}e_{klmi}\,dS^{klm}$ и $\frac{1}{2}e_{iklm}\,df^{lm}$ (а не для их произведений на $\sqrt{-g}$); правила (6,14—19) для преобразования различных интегралов друг в друга остаются тогда теми же самыми, поскольку их вывод имеет формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин. Из них нам в особенности понадобится правило преобразования интеграла по гиперповерхности в интеграл по 4-объему (теорема Гаусса), осуществляющегося заменой

$$dS_i \to d\Omega\,\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (83,17)$$

§ 84. Расстояния и промежутки времени

Мы уже говорили, что в общей теории относительности выбор системы отсчета ничем не ограничен; тремя пространственными координатами x^1, x^2, x^3 могут являться любые величины, определяющие расположение тел в пространстве, а временная координата x^0 может определяться произвольно идущими часами. Возникает вопрос о том, каким образом по значениям величин x^0, x^1, x^2, x^3 можно определить истинные расстояния и промежутки времени.

Определим сначала связь истинного времени, которое мы будем ниже обозначать посредством τ, с координатой x^0. Для

---

[1]) Подразумевается, что элементы dS^{klm} и df^{ik} построены по бесконечно малым смещениям dx^i, dx'^i, dx''^i таким же образом, как они были определены в § 6, каков бы ни был геометрический смысл координат x^i. Тогда остается в силе и прежний формальный смысл элементов dS_i, df^*_{ik}. В частности, по-прежнему, $dS_0 = dx^1\,dx^2\,dx^3 = dV$. Мы сохраним в дальнейшем прежнее обозначение dV для произведения дифференциалов трех пространственных координат; надо, однако, помнить, что элемент геометрического пространственного объема дается в криволинейных координатах не самим dV, а произведением $\sqrt{\gamma}\,dV$, где γ — определитель пространственного метрического тензора (который будет найден в следующем параграфе).