нечно малых смещениях, есть контравариантный антисимметричный тензор dS^{ikl}; дуальный ему вектор получается при умножении на тензор $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$, т. е. равен

$$\sqrt{-g}\,dS_i = -\frac{1}{6}e_{iklm}\,dS^{klm}\sqrt{-g}. \qquad (83,15)$$

Аналогично, если df^{ik} есть элемент поверхности (двухмерной), построенный на двух бесконечно малых смещениях, то дуальный ему тензор определяется как[1])

$$\sqrt{-g}\,df^*_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,e_{iklm}\,df^{lm}. \qquad (83,16)$$

Мы оставляем здесь обозначения dS_i и df^*_{ik}, как и прежде, соответственно для $\frac{1}{6}e_{klmi}\,dS^{klm}$ и $\frac{1}{2}e_{iklm}\,df^{lm}$ (а не для их произведений на $\sqrt{-g}$); правила (6,14—19) для преобразования различных интегралов друг в друга остаются тогда теми же самыми, поскольку их вывод имеет формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин. Из них нам в особенности понадобится правило преобразования интеграла по гиперповерхности в интеграл по 4-объему (теорема Гаусса), осуществляющегося заменой

$$dS_i \to d\Omega\,\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (83,17)$$

§ 84. Расстояния и промежутки времени

Мы уже говорили, что в общей теории относительности выбор системы отсчета ничем не ограничен; тремя пространственными координатами x^1, x^2, x^3 могут являться любые величины, определяющие расположение тел в пространстве, а временная координата x^0 может определяться произвольно идущими часами. Возникает вопрос о том, каким образом по значениям величин x^0, x^1, x^2, x^3 можно определить истинные расстояния и промежутки времени.

Определим сначала связь истинного времени, которое мы будем ниже обозначать посредством τ, с координатой x^0. Для

---

[1]) Подразумевается, что элементы dS^{klm} и df^{ik} построены по бесконечно малым смещениям dx^i, dx'^i, dx''^i таким же образом, как они были определены в § 6, каков бы ни был геометрический смысл координат x^i. Тогда остается в силе и прежний формальный смысл элементов dS_i, df^*_{ik}. В частности, по-прежнему, $dS_0 = dx^1\,dx^2\,dx^3 = dV$. Мы сохраним в дальнейшем прежнее обозначение dV для произведения дифференциалов трех пространственных координат; надо, однако, помнить, что элемент геометрического пространственного объема дается в криволинейных координатах не самим dV, а произведением $\sqrt{\gamma}\,dV$, где γ — определитель пространственного метрического тензора (который будет найден в следующем параграфе).

этого рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной и той же точке пространства. Тогда интеграл ds^2 между этими двумя событиями есть не что иное, как $cd\tau$, где $d\tau$ — промежуток времени (истинного) между обоими событиями. Полагая $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ в общем выражении $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, находим, следовательно,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0, \tag{84,1}$$

или для времени между любыми двумя событиями в одной и той же точке пространства

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{84,2}$$

Эти соотношения и определяют промежутки истинного времени (или, как говорят, *собственного времени* для данной точки пространства) по изменению координаты x^0. Заметим также, что величина g_{00}, как видно из приведенных формул, положительна:

$$g_{00} > 0. \tag{84,3}$$

Необходимо подчеркнуть разницу между смыслом условия (84,3) и смыслом условия об определенной сигнатуре (знаках главных значений) тензора g_{ik} (§ 82). Тензор g_{ik}, не удовлетворяющий второму из этих условий, вообще не может соответствовать какому бы то ни было реальному гравитационному полю, т. е. метрике реального пространства-времени. Невыполнение же условия (84,3) означало бы лишь, что соответствующая система отсчета не может быть осуществлена реальными телами; если условие о главных значениях при этом выполняется, то надлежащим преобразованием координат можно добиться того, что g_{00} станет положительным (пример подобной системы представляет собой вращающаяся система координат — см. § 89).

Определим теперь элемент dl пространственного расстояния. В специальной теории относительности можно определять dl как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в один и тот же момент времени. В общей теории относительности этого, вообще говоря, уже нельзя сделать, т. е. нельзя определить dl, просто положив $dx^0 = 0$ в ds. Это связано с тем, что в гравитационном поле собственное время в разных точках пространства различным образом связано с координатой x^0.

Для определения dl поступим теперь следующим образом. Пусть из некоторой точки B пространства (с координатами $x^\alpha + dx^\alpha$) отправляется световой сигнал в бесконечно близкую к ней точку A (с координатами x^α), а затем сразу обратно по

тому же пути. Необходимое для этого время (отсчитываемое в одной и той же точке B), умноженное на c, есть, очевидно, удвоенное расстояние между обеими точками.

Напишем интервал, выделив пространственные и временную координаты:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + 2g_{0\alpha}\, dx^0\, dx^\alpha + g_{00}\,(dx^0)^2, \tag{84,4}$$

где, как обычно, по дважды повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Интервал между событиями, являющимися уходом и приходом сигнала из одной точки в другую, равен нулю. Решая уравнение $ds^2 = 0$ относительно dx^0, найдем два корня:

$$\begin{aligned} dx^{0\,(1)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-\, g_{0\alpha}\, dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha\, dx^\beta}\,\right), \\ dx^{0\,(2)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-\, g_{0\alpha}\, dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha\, dx^\beta}\,\right), \end{aligned} \tag{84,5}$$

отвечающих распространению сигнала в двух направлениях между A и B. Если x^0 есть момент прибытия сигнала в A, то моменты его отправления из B и обратного возвращения в B будут соответственно $x^0 + dx^{0(1)}$ и $x^0 + dx^{0(2)}$. На схематическом рис. 18 сплошные прямые — мировые линии, соответствующие заданным координатам x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$, а штриховые — мировые линии сигналов[1]). Ясно, что полный промежуток «времени» между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен

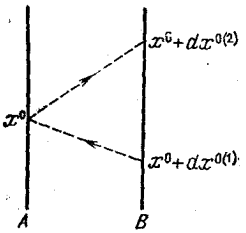

Рис. 18

$$dx^{0\,(2)} - dx^{0\,(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha\, dx^\beta}.$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда согласно (84,1) умножением на $\sqrt{g_{00}}/c$, а расстояние dl между обеими точками — еще умножением на $c/2$. В результате находим:

$$dl^2 = \left(-\, g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha\, dx^\beta.$$

Это и есть искомое выражение, определяющее расстояние через элементы пространственных координат. Перепишем его в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{84,6}$$

[1]) На рис. 18 предположено, что $dx^{0(2)} > 0$, $dx^{0(1)} < 0$, что, однако, необязательно: $dx^{0(1)}$ и $dx^{0(2)}$ могут оказаться и одного знака. Тот факт, что в таком случае значение $x^0(A)$ в момент прихода сигнала в A могло бы оказаться меньшим значения $x^0(B)$ в момент его выхода из B, не заключает в себе никакого противоречия, поскольку ход часов в различных точках пространства не предполагается каким-либо способом синхронизованным.

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{84,7}$$

есть трехмерный метрический тензор, определяющий метрику, т. е. геометрические свойства пространства. Соотношениями (84,7) устанавливается связь между метрикой реального пространства и метрикой четырехмерного пространства-времени[1]).

Необходимо, однако, помнить, что g_{ik} зависят, вообще говоря, от x^0, так что и пространственная метрика (84,6) меняется со временем. По этой причине не имеет смысла интегрировать dl — такой интеграл зависел бы от того, по какой мировой линии между двумя заданными пространственными точками он брался. Таким образом, в общей теории относительности теряет, вообще говоря, смысл понятие об определенном расстоянии между телами, остающееся в силе лишь в бесконечно малом. Единственным случаем, когда расстояние может быть определено и в конечных областях пространства, являются такие системы отсчета, в которых g_{ik} не зависят от времени, и потому интеграл $\int dl$ вдоль пространственной кривой имеет определенный смысл.

Полезно заметить, что тензор $-\gamma_{\alpha\beta}$ является тензором, обратным контравариантному трехмерному тензору $g^{\alpha\beta}$. Действительно, расписав в компонентах равенство $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$, имеем:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} &= \delta^\alpha_\gamma, \\ g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} &= 0, \\ g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} &= 1. \end{aligned} \tag{84,8}$$

Определив $g^{\alpha 0}$ из второго равенства и подставив в первое, получим:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

---

[1]) Квадратичная форма (84,6) должна быть существенно положительной. Для этого ее коэффициенты должны, как известно, удовлетворять условиям

$$\gamma_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Выражая γ_{ik} через g_{ik} легко найдем, что эти условия принимают вид

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad g < 0.$$

Этим условиям вместе с условием (84,3) должны удовлетворять компоненты метрического тензора во всякой системе отсчета, которая может быть осуществлена с помощью реальных тел.

что и требовалось доказать. Этот результат можно сформулировать иначе, сказав, что величины $-g^{\alpha\beta}$ составляют контравариантный трехмерный метрический тензор, отвечающий метрике (84,6):

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}. \tag{84,9}$$

Укажем также, что определители g и γ, составленные соответственно из величин g_{ik} и $\gamma_{\alpha\beta}$, связаны друг с другом простым соотношением:

$$-g = g_{00}\gamma. \tag{84,10}$$

В ряде дальнейших применений нам будет удобно вводить трехмерный вектор $\mathbf{g}$, ковариантные компоненты которого определяются как

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \tag{84,11}$$

Рассматривая $\mathbf{g}$ как вектор в пространстве с метрикой (84,6), мы должны определить его контравариантные компоненты как $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta$. С помощью (84,9) и второго из равенств (84,8) легко видеть, что

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta = -g^{0\alpha}. \tag{84,12}$$

Отметим также формулу

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha, \tag{84,13}$$

следующую из третьего из равенств (84,8).

Перейдем теперь к определению понятия одновременности в общей теории относительности. Другими словами, выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, т. е. приведения в соответствие друг с другом показаний этих часов.

Такая синхронизация должна быть, очевидно, осуществлена с помощью обмена световыми сигналами между обеими точками. Рассмотрим снова процесс распространения сигналов между двумя бесконечно близкими точками A и B, изображенный на рис. 18. Одновременным с моментом x^0 в точке A следует считать показание часов в точке B, лежащее посередине между моментами отправления и обратного прибытия сигнала в эту точку, т. е. момент

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}(dx^{0\,(2)} + dx^{0\,(1)}).$$

Подставляя сюда (84,5), находим разность значений «времени» x^0 для двух одновременных событий, происходящих в бесконечно близких точках, в виде

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha\,dx^\alpha. \tag{84,14}$$

Это соотношение дает возможность синхронизовать часы в любом бесконечно малом объеме пространства. Продолжая подобную синхронизацию из точки A дальше, можно синхронизовать часы, т. е. определить одновременность событий вдоль любой незамкнутой линии[1]).

Синхронизация же часов вдоль замкнутого контура оказывается, вообще говоря, невозможной. Действительно, обойдя вдоль контура и вернувшись в исходную точку, мы получили бы для Δx^0 отличное от нуля значение. Тем более оказывается невозможной однозначная синхронизация часов во всем пространстве. Исключение составляют лишь такие системы отсчета, в которых все компоненты $g_{0\alpha}$ равны нулю[2]).

Следует подчеркнуть, что невозможность синхронизации всех часов является свойством именно произвольной системы отсчета, а не пространства-времени как такового. В любом гравитационном поле всегда можно выбрать (и даже бесчисленным числом способов) систему отсчета таким образом, чтобы обратить три величины $g_{0\alpha}$ тождественно в нуль и, тем самым, сделать возможной полную синхронизацию часов (см. § 97).

Уже в специальной теории относительности течение истинного времени различно для движущихся друг относительно друга часов. В общей же теории относительности истинное время течет различным образом и в разных точках пространства в одной и той же системе отсчета. Это значит, что интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал времени между одновременными с ними событиями в другой точке пространства, вообще говоря, отличны друг от друга.

§ 85. Ковариантное дифференцирование

В галилеевых координатах[3]) дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\partial A_i/\partial x^k$ от компонент вектора по координатам образуют тензор. В криволинейных же координатах это не имеет места; dA_i не есть вектор, а $\partial A_i/\partial x^k$ не есть тензор. Это связано с тем, что dA_i есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются раз-

---

[1]) Умножив равенство (84,14) на g_{00} и перенеся оба члена в одну сторону, можно представить условие синхронизации в виде $dx_0 = g_{0i}dx^i = 0$: должен быть равен нулю «ковариантный дифференциал» dx_0 между двумя бесконечно близкими одновременными событиями.

[2]) Сюда же следует причислять случаи, когда $g_{0\alpha}$ могут быть обращены в нуль простым преобразованием временной координаты, не затрагивающим выбора системы объектов, служащих для определения пространственных координат.

[3]) Вообще всегда, когда величины g_{ik} постоянны.