Это соотношение дает возможность синхронизовать часы в любом бесконечно малом объеме пространства. Продолжая подобную синхронизацию из точки A дальше, можно синхронизовать часы, т. е. определить одновременность событий вдоль любой незамкнутой линии[1]).

Синхронизация же часов вдоль замкнутого контура оказывается, вообще говоря, невозможной. Действительно, обойдя вдоль контура и вернувшись в исходную точку, мы получили бы для Δx^0 отличное от нуля значение. Тем более оказывается невозможной однозначная синхронизация часов во всем пространстве. Исключение составляют лишь такие системы отсчета, в которых все компоненты $g_{0\alpha}$ равны нулю[2]).

Следует подчеркнуть, что невозможность синхронизации всех часов является свойством именно произвольной системы отсчета, а не пространства-времени как такового. В любом гравитационном поле всегда можно выбрать (и даже бесчисленным числом способов) систему отсчета таким образом, чтобы обратить три величины $g_{0\alpha}$ тождественно в нуль и, тем самым, сделать возможной полную синхронизацию часов (см. § 97).

Уже в специальной теории относительности течение истинного времени различно для движущихся друг относительно друга часов. В общей же теории относительности истинное время течет различным образом и в разных точках пространства в одной и той же системе отсчета. Это значит, что интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал времени между одновременными с ними событиями в другой точке пространства, вообще говоря, отличны друг от друга.

§ 85. Ковариантное дифференцирование

В галилеевых координатах[3]) дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\partial A_i/\partial x^k$ от компонент вектора по координатам образуют тензор. В криволинейных же координатах это не имеет места; dA_i не есть вектор, а $\partial A_i/\partial x^k$ не есть тензор. Это связано с тем, что dA_i есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются раз-

---

[1]) Умножив равенство (84,14) на g_{00} и перенеся оба члена в одну сторону, можно представить условие синхронизации в виде $dx_0 = g_{0i}dx^i = 0$: должен быть равен нулю «ковариантный дифференциал» dx_0 между двумя бесконечно близкими одновременными событиями.

[2]) Сюда же следует причислять случаи, когда $g_{0\alpha}$ могут быть обращены в нуль простым преобразованием временной координаты, не затрагивающим выбора системы объектов, служащих для определения пространственных координат.

[3]) Вообще всегда, когда величины g_{ik} постоянны.

лично, так как коэффициенты в формулах преобразования (83,2), (83,4) являются функциями координат.

В сказанном легко убедиться и непосредственно. Для этого выведем формулы преобразования дифференциалов dA_i в криволинейных координатах. Ковариантный вектор преобразуется согласно формулам

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Таким образом, dA_i преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов). Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, т. е. если x'^k являются линейными функциями от x^k, формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k,$$

т. е. dA_i преобразуется как вектор.

Мы займемся теперь определением тензора, который играет в криволинейных координатах роль тензора $\partial A_i/\partial x^k$ в галилеевых координатах. Другими словами, мы должны преобразовать $\partial A_i/\partial x^k$ от галилеевых координат к криволинейным.

Для того чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, надо, чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства. Другими словами, надо каким-то образом «перенести» один из двух бесконечно близких векторов в точку, где находится второй, после чего определить разность обоих векторов, относящихся теперь к одной и той же точке пространства. Сама операция переноса должна быть при этом определена таким образом, чтобы в галилеевых координатах указанная разность совпадала с обычным дифференциалом dA_i. Поскольку dA_i есть просто разность компонент двух бесконечно близких векторов, то это значит, что в результате операции переноса при пользовании галилеевыми координатами компоненты вектора не должны изменяться. Но такой перенос есть не что иное, как перенос вектора параллельно самому себе. При *параллельном переносе* вектора его компоненты в галилеевых координатах не меняются; если же пользоваться криволинейными координатами, то при таком переносе компоненты вектора, вообще говоря, изменятся. Поэтому в криволинейных координатах разность ком-

понент обоих векторов после перенесения одного из них в точку, где находится второй, не будет совпадать с их разностью до переноса (т. е. с дифференциалом dA_i).

Таким образом, при сравнении двух бесконечно близких векторов мы должны один из них подвергнуть параллельному переносу в точку, где находится второй. Рассмотрим какой-нибудь контравариантный вектор; если его значение в точке с координатами x^i есть A^i, то в соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$. Вектор A^i подвергнем бесконечно малому параллельному переносу в точку $x^i + dx^i$; его изменение при этом обозначим посредством δA^i. Тогда разность DA^i между обоими векторами, находящимися теперь в одной точке, равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{85,1}$$

Изменение δA^i компонент вектора при бесконечно малом параллельном переносе зависит от величины самих компонент, причем эта зависимость должна, очевидно, быть линейной. Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них. Таким образом, δA^i имеет вид

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{85,2}$$

где Γ^i_{kl} — некоторые функции координат, вид которых зависит, конечно, от выбора системы координат; в галилеевой системе все $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Уже отсюда видно, что величины Γ^i_{kl} не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой. В искривленном пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все Γ^i_{kl} везде в нуль.

Принцип эквивалентности требует, однако, чтобы надлежащим выбором системы координат можно было исключить гравитационное поле в данном бесконечно малом участке пространства, т. е. обратить в нем в нуль величины Γ^i_{kl}, играющие, как мы увидим ниже в § 87, роль напряженностей этого поля[1]).

Величины Γ^i_{kl} называют *коэффициентами связности* или *символами Кристоффеля*.

Мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{i,kl}$[2]),

---

[1]) Именно такую систему координат надо иметь в виду во всех рассуждениях, где мы для краткости говорим просто о галилеевой системе; тем самым все доказательства становятся относящимися не только к плоскому, но и к кривому 4-пространству.

[2]) Вместо обозначений Γ^i_{kl} и $\Gamma_{i,kl}$ иногда пользуются обозначениями соответственно $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ и $\left[{kl \atop i} \right]$.

определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{i,\,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \tag{85,3}$$

Обратно:

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,\,kl}. \tag{85,4}$$

Легко связать и изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе с символами Кристоффеля. Для этого заметим, что при параллельном переносе скаляры, очевидно, не меняются. В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть A_i и B^i — некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы. Тогда из $\delta(A_iB^i) = 0$ имеем:

$$B^i\,\delta A_i = -A_i\,\delta B^i = \Gamma^i_{kl}B^kA_i\,dx^l,$$

или, меняя обзначение индексов,

$$B^i\,\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_kB^i\,dx^l.$$

Отсюда имеем ввиду произвольности B^i:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_k\,dx^l, \tag{85,5}$$

чем и определяется изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Подставляя (85,2) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}dx^l$ в (85,1), имеем:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{85,6}$$

Аналогично находим для ковариантного вектора:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l. \tag{85,7}$$

Выражения, стоящие в скобках в (85,6—7) являются тензорами, так как умноженные на вектор dx^l они дают снова вектор. Очевидно, что они и являются теми тензорами, которые осуществляют искомое обобщение понятия производной от вектора на криволинейные координаты. Эти тензоры носят название *ковариантных производных* соответственно векторов A^i и A_i. Мы будем обозначать их посредством $A^i{}_{;k}$ и $A_{i;k}$. Таким образом,

$$DA^i = A^i{}_{;l}\,dx^l, \qquad DA_i = A_{i;l}\,dx^l, \tag{85,8}$$

а сами ковариантные производные:

$$A^i{}_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k, \tag{85,9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k. \tag{85,10}$$

В галилеевых координатах $\Gamma^i_{kl}=0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Легко определить также ковариантную производную от тензора. Для этого надо определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе. Рассмотрим, например, какой-нибудь контравариантный тензор, являющийся произведением двух контравариантных векторов A^iB^k. При параллельном переносе имеем:

$$\delta(A^iB^k)=A^i\,\delta B^k+B^k\,\delta A^i=-A^i\Gamma^k_{lm}B^l\,dx^m-B^k\Gamma^i_{lm}A^l\,dx^m.$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место и для любого тензора A^{ik}:

$$\delta A^{ik}=-\left(A^{im}\Gamma^k_{ml}+A^{mk}\Gamma^i_{ml}\right)dx^l. \qquad (85,11)$$

Подставляя это в

$$DA^{ik}=dA^{ik}-\delta A^{ik}\equiv A^{ik}{}_{;l}\,dx^l,$$

находим ковариантную производную тензора A^{ik} в виде

$$A^{ik}{}_{;l}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{ml}A^{mk}+\Gamma^k_{ml}A^{im}. \qquad (85,12)$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров в виде

$$A^i_{k;\,l}=\frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}-\Gamma^m_{kl}A^i_m+\Gamma^i_{ml}A^m_k, \qquad (85,13)$$

$$A_{ik;\,l}=\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l}-\Gamma^m_{il}A_{mk}-\Gamma^m_{kl}A_{im}. \qquad (85,14)$$

Аналогичным образом можно определить ковариантную производную тензора любого ранга. При этом получается следующее правило ковариантного дифференцирования: чтобы получить ковариантную производную тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по x^l, к обычной производной $\partial A^{\cdots}_{\cdots}/\partial x^l$ на каждый ковариантный индекс $i\,(A^{\cdots}_{\cdots i\cdots})$ надо прибавить член $-\Gamma^k_{il}A^{\cdots}_{\cdots k\cdots}$, а на каждый контравариантный индекс $i\,(A^{\cdots i\cdots}_{\cdots})$ надо прибавить член $+\Gamma^i_{kl}A^{\cdots k\cdots}_{\cdots}$.

Можно легко убедиться в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная от произведения. При этом ковариантную производную от скаляра φ надо понимать как обычную производную, т. е. как ковариантный вектор $\varphi_k=\partial\varphi/\partial x^k$, в согласии с тем, что для скаляров $\delta\varphi=0$ и потому $D\varphi=d\varphi$. Например, ковариантная производная произведения A_iB_k равна

$$(A_iB_k)_{;\,l}=A_{i;\,l}B_k+A_iB_{k;\,l}.$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные производные. Так,

$$A_i{}^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \qquad A^{i;k} = g^{kl} A^i{}_{;l}.$$

Выведем теперь формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля.

Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования обеих частей равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих частей были одинаковы. Простое вычисление приводит к формуле

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \qquad (85,15)$$

Из этой формулы видно, что величины Γ^i_{kl} ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат (когда исчезает второй член в (85,15)).

Заметим, однако, что этот член симметричен по индексам k, l; поэтому он выпадает при образовании разности $S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$. Она преобразуется, следовательно, по тензорному закону

$$S^i_{kl} = S'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l},$$

т. е. является тензором. Его называют *тензором кручения* пространства.

Покажем теперь, что в излагаемой теории, основанной на принципе эквивалентности, тензор кручения должен равняться нулю. Действительно, как уже говорилось, в силу этого принципа должна существовать «галилеева» система координат, в которой в данной точке обращаются в нуль величины Γ^i_{kl}, а следовательно и S^i_{kl}. На поскольку S^i_{kl} — тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он будет равен нулю и в любой системе координат. Это означает, что символы Кристоффеля должны быть симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \qquad (85,16)$$

Очевидно, что и

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \qquad (85,17)$$

В общем случае имеется всего 40 различных величин Γ^i_{kl} — для каждого из четырех значений индекса i имеется 10 различных пар значений индексов k и l (считая пары, получающиеся перестановкой k и l одинаковыми).

Формула (85,15) позволяет доказать сделанное выше утверждение о возможности при условии (85,16) такого выбора си-

стемы координат, при котором все Γ^i_{kl} обращаются в нуль в любой наперед заданной точке (такую систему называют *локально-инерциальной* или *локально-геодезической*, см. § 87)[1].

Действительно, пусть заданная точка выбрана в качестве начала координат и величины Γ^i_{kl} имеют в ней первоначально (в координатах x^i) значения $(\Gamma^i_{kl})_0$. Произведем вблизи этой точки преобразование

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}(\Gamma^i_{kl})_0 x^k x^l. \tag{85,18}$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^m}\right)_0 = (\Gamma^i_{kl})_0 \tag{85,19}$$

и согласно (85,15) все Γ'^m_{np} обращаются в нуль.

Подчеркнем, что условие (85,16) здесь существенно: выражение в левой части равенства (85,19) симметрично по индексам k, l, поэтому должна быть симметрична и правая часть равенства.

Заметим, что для преобразования (85,18)

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)_0 = \delta^i_k,$$

поэтому оно не меняет значений любого тензора (в том числе тензора g_{ik}) в заданной точке, так что обращение символов Кристоффеля в нуль может быть осуществлено одновременно с приведением g_{ik} к галилееву виду.

§ 86. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik}A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik}DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i:

$$Dg_{ik} = 0.$$

---

[1]) Можно показать также, что надлежащим выбором системы координат можно обратить в нуль все Γ^i_{kl} не только в данной точке, но и вдоль заданной мировой линии (доказательство этого утверждения можно найти в книге: *П. К. Рашевский*, Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1964, § 91).