

стемы координат, при котором все Γ_{kl}^i обращаются в нуль в любой наперед заданной точке (такую систему называют *локально-инерциальной* или *локально-геодезической*, см. § 87)¹⁾.

Действительно, пусть заданная точка выбрана в качестве начала координат и величины Γ_{kl}^i имеют в ней первоначально (в координатах x^i) значения $(\Gamma_{kl}^i)_0$. Произведем вблизи этой точки преобразование

$$x'^l = x^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{kl}^i)_0 x^k x^l. \quad (85,18)$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^m} \right)_0 = (\Gamma_{kl}^i)_0 \quad (85,19)$$

и согласно (85,15) все Γ_{np}^{im} обращаются в нуль.

Подчеркнем, что условие (85,16) здесь существенно: выражение в левой части равенства (85,19) симметрично по индексам k, l , поэтому должна быть симметрична и правая часть равенства.

Заметим, что для преобразования (85,18)

$$\left(\frac{\partial x'^l}{\partial x^k} \right)_0 = \delta_k^l,$$

поэтому оно не меняет значений любого тензора (в том числе тензора g_{ik}) в заданной точке, так что обращение символов Кристоффеля в нуль может быть осуществлено одновременно с приведением g_{ik} к галилееву виду.

§ 86. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i , как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik} A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik} DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i :

$$Dg_{ik} = 0.$$

¹⁾ Можно показать также, что надлежащим выбором системы координат можно обратить в нуль все Γ_{kl}^i не только в данной точке, но и вдоль заданной мировой линии (доказательство этого утверждения можно найти в книге: П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1964, § 91).

Поэтому и ковариантная производная

$$g_{ik;l} = 0. \quad (86,1)$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные.

Равенством $g_{ik;l} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля Γ'_{kl} через метрический тензор g_{ik} . Для этого напишем согласно общему определению (85,14):

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma_{il}^m - g_{lm}\Gamma_{kl}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{l,kl} = 0.$$

Таким образом, производные от g_{ik} выражаются через символы Кристоффеля¹⁾. Напишем эти производные, переставляя индексы i, k, l :

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{l,ki}, \quad \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \Gamma_{l,kl} + \Gamma_{k,il}, \quad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,il}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{l,ik}$):

$$\Gamma_{l,kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right). \quad (86,2)$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma_{kl}^i = g^{im}\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (86,3)$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощенного символа Кристоффеля Γ_{ki}^l . Для этого определим дифференциал dg определителя g , составленного из компонент тензора g_{ik} . dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в определителе, т. е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора g^{ik} , обратного тензору g_{ik} , равны, как известно, минорам определителя из величин g_{ik} , деленным на этот определитель. Поэтому миноры определителя g равны gg^{ik} . Таким образом,

$$dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^{ik} \quad (86,4)$$

(поскольку $g_{ik}g^{ik} = \delta_i^i = 4$, то $g^{ik}dg_{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$).

Из (86,3) имеем:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

¹⁾ Выбор локально-геодезической системы координат означает поэтому обращение в нуль в данной точке всех первых производных от компонент метрического тензора.

Меняя местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k},$$

или согласно (86,4)

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \quad (86,5)$$

Полезно заметить также выражение для величины $g^{kl}\Gamma_{kl}^i$. Имеем:

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

С помощью (86,4) это можно преобразовать к виду

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{ik})}{\partial x^k}. \quad (86,6)$$

При различных вычислениях бывает полезным иметь в виду, что производные от контравариантного тензора g^{ik} связаны с производными от g_{ik} соотношениями

$$g_{il} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m} = - g^{lk} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \quad (86,7)$$

(получающимися при дифференцировании равенства $g_{il}g^{ik} = \delta_i^k$). Наконец, укажем, что производные от g^{ik} тоже могут быть выражены через величины Γ_{kl}^i . Именно, из тождества $g^{ik}_{;l} = 0$ непосредственно следует, что

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = - \Gamma_{ml}^i g^{mk} - \Gamma_{ml}^k g^{im}. \quad (86,8)$$

С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A_{;l}^i$, являющееся обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты. Воспользовавшись (86,5), имеем:

$$A_{;l}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^j A^j = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

или окончательно

$$A_{;l}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^l}. \quad (86,9)$$

Аналогичное выражение можно получить и для дивергенции антисимметричного тензора A^{ik} . Из (85,12) имеем:

$$A_{;k}^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^i A^{mk} + \Gamma_{mk}^k A^{im}.$$

Но поскольку $A^{mk} = -A^{km}$, то

$$\Gamma_{mk}^i A^{mk} = -\Gamma_{km}^i A^{km} = 0.$$

Подставляя выражение (86,5) для Γ_{mk}^k , находим, следовательно:

$$A_{;k}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^{ik})}{\partial x^k}. \quad (86,10)$$

Пусть теперь A_{ik} — симметричный тензор; определим выражение $A_{i;k}^k$ для его смешанных компонент. Имеем:

$$A_{i;k}^k = \frac{\partial A_i^k}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^k A_i^l - \Gamma_{ik}^l A_l^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (A_i^k \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_l^k.$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) A^{kl}.$$

В силу симметрии тензора A^{kl} два члена в скобках взаимно сокращаются, и остается

$$A_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}. \quad (86,11)$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}$ есть антисимметричный тензор. В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{i;k} - A_{k;i}$. Однако с помощью выражений для $A_{i;k}$ и ввиду того, что $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$, имеем:

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}. \quad (86,12)$$

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x^l}$ вторых производных от некоторого скаляра Φ . Очевидно, что в криволинейных координатах эта сумма перейдет в $\Phi_{;i}^{;l}$. Но $\Phi_{;i} = \partial \Phi / \partial x^i$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию. Поднимая индекс i , имеем:

$$\Phi_{;i}^{;l} = g^{lk} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$$

и с помощью формулы (86,9) находим:

$$\Phi_{;i}^{;l} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{lk} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \right). \quad (86,13)$$

Полезно заметить, что теорема Гаусса (83,17) для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объему может быть написана ввиду (86,9) как

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int A_{;i}^i \sqrt{-g} d\Omega. \quad (86,14)$$

§ 87. Движение частицы в гравитационном поле

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \quad (87,1)$$

согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т. е. в данном случае прямой (в обычном трехмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение).

Движение частицы в гравитационном поле должно определяться принципом наименьшего действия в той же форме (87,1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, проявляющимся только в изменении выражения ds через dx^i . Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка перемещается по экстремальной, или, как говорят, по геодезической линии в 4-пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 ; поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время негалилеево, то эта линия не «прямая», а реальное пространственное движение частицы — не равномерно и не прямолинейно.

Вместо того чтобы снова исходить непосредственно из принципа наименьшего действия (см. задачу к этому параграфу), проще найти уравнения движения частицы в гравитационном поле путем соответствующего обобщения дифференциальных уравнений свободного движения частицы в специальной теории относительности, т. е. в галилеевой 4-системе координат. Эти уравнения гласят $du^i/ds = 0$, или иначе $du^i = 0$, где $u^i = dx^i/ds$ есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в

$$Du^i = 0. \quad (87,2)$$

Из выражения (85,6) для ковариантного дифференциала вектора имеем:

$$du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l = 0.$$

Разделив это уравнение на ds , находим:

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \Gamma_{kl}^l \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (87,3)$$