Полезно заметить, что теорема Гаусса (83,17) для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объему может быть написана ввиду (86,9) как

$$\oint A^i \sqrt{-g}\, dS_i = \int A^i_{;i} \sqrt{-g}\, d\Omega. \qquad (86,14)$$

§ 87. Движение частицы в гравитационном поле

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \qquad (87,1)$$

согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т. е. в данном случае прямой (в обычном трехмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение).

Движение частицы в гравитационном поле должно определяться принципом наименьшего действия в той же форме (87,1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, проявляющимся только в изменении выражения ds через dx^i. Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка перемещается по экстремальной, или, как говорят, по *геодезической* линии в 4-пространстве x^0, x^1, x^2, x^3; поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время негалилеево, то эта линия не «прямая», а реальное пространственное движение частицы — не равномерно и не прямолинейно.

Вместо того чтобы снова исходить непосредственно из принципа наименьшего действия (см. задачу к этому параграфу), проще найти уравнения движения частицы в гравитационном поле путем соответствующего обобщения дифференциальных уравнений свободного движения частицы в специальной теории относительности, т. е. в галилеевой 4-системе координат. Эти уравнения гласят $du^i/ds = 0$, или иначе $du^i = 0$, где $u^i = dx^i/ds$ есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в

$$Du^i = 0. \qquad (87,2)$$

Из выражения (85,6) для ковариантного дифференциала вектора имеем:

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0.$$

Разделив это уравнение на ds, находим:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \qquad (87,3)$$

Это и есть искомые уравнения движения. Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами Γ^i_{kl}. Производная d^2x^i/ds^2 есть 4-ускорение частицы. Поэтому мы можем назвать величину $-m\Gamma^i_{kl}u^ku^l$ «4-силой», действующей на частицу в гравитационном поле. Тензор g_{ik} играет при этом роль «потенциалов» гравитационного поля — его производные определяют «напряженность» поля Γ^i_{kl} [1]).

В § 85 было показано, что соответствующим выбором системы координат всегда можно обратить все Γ^i_{kl} в нуль в любой заданной точке пространства-времени. Мы видим теперь, что выбор такой локально-инерциальной системы отсчета означает исключение гравитационного поля в данном бесконечно малом элементе пространства-времени, а возможность такого выбора есть выражение принципа эквивалентности в релятивистской теории тяготения [2]).

4-импульс частицы в гравитационном поле определяется попрежнему как

$$p^i = mcu^i, \tag{87,4}$$

а его квадрат равен

$$p_ip^i = m^2c^2. \tag{87,5}$$

Подставив сюда $-\partial S/\partial x^i$ вместо p_i, найдем уравнение Гамильтона — Якоби для частицы в гравитационном поле:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0. \tag{87,6}$$

Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (87,3) неприменимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал $ds = 0$ и все члены в уравнении (87,3) обращаются в бесконечность. Для придания уравнениям движения в этом случае нужного

---

[1]) Отметим также вид уравнения движения, выраженного через ковариантные компоненты 4-ускорения. Из условия $Du_i = 0$ находим:

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,\,il}u^ku^l = 0.$$

При подстановке сюда $\Gamma_{k,\,il}$ из (86,2) два члена сокращаются и остается

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^ku^l = 0. \tag{87,3a}$$

[2]) В примечании на стр. 313 была также упомянута возможность выбора системы отсчета, «инерциальной вдоль заданной мировой линии». В частности, если такой линией является координатная линия времени (вдоль которой x^1, x^2, x^3 = const), то тем самым гравитационное поле будет исключено в заданном элементе пространственного объема на протяжении всего времени.

вида воспользуемся тем, что направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $k^i = dx^i/d\lambda$, где λ есть некоторый параметр, меняющийся вдоль луча. В специальной теории относительности при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $dk^i = 0$ (см. § 53). В гравитационном поле это уравнение переходит в $Dk^i = 0$, или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 \tag{87,7}$$

(из этих же уравнений определится и параметр λ)[1].

Квадрат волнового 4-вектора равен нулю (см. § 48):

$$k_i k^i = 0. \tag{87,8}$$

Подставляя сюда $\partial\psi/\partial x^i$ вместо k_i (ψ — эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле:

$$g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0. \tag{87,9}$$

В предельном случае малых скоростей релятивистские уравнения движения частицы в гравитационном поле должны перейти в соответствующие нерелятивистские уравнения. При этом надо иметь в виду, что из предположения о малости скоростей вытекает также условие, что само гравитационное поле должно быть слабым; в противном случае находящаяся в нем частица приобрела бы большую скорость.

Выясним, как связан в этом предельном случае метрический тензор g_{ik} с нерелятивистским потенциалом φ гравитационного поля.

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа (81,1). Мы напишем ее теперь в виде

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{87,10}$$

прибавив постоянную $-mc^2$[2]. Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $L = -mc^2 + mv^2/2$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в пределе при $v/c \to 0$.

---

[1]) Геодезические, вдоль которых $ds = 0$, называют нулевыми или изотропными.

[2]) Потенциал φ определен, разумеется, лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Мы подразумеваем везде естественный выбор этой постоянной, при котором потенциал обращается в нуль вдали от тел, создающих поле.

Нерелятивистское действие S для частицы в гравитационном поле, следовательно, имеет вид

$$S=\int L\,dt=-mc\int\left(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\varphi}{c}\right)dt.$$

Сравнивая это с выражением $S=-mc\int ds$, мы видим, что в рассматриваемом предельном случае

$$ds=\left(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\varphi}{c}\right)dt.$$

Возводя в квадрат и опуская члены, обращающиеся при $c\to\infty$ в нуль, находим:

$$ds^2=(c^2+2\varphi)\,dt^2-d\mathbf{r}^2, \tag{87,11}$$

где мы учли, что $\mathbf{v}dt=d\mathbf{r}$.

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора в предельном случае равна

$$g_{00}=1+\frac{2\varphi}{c^2}. \tag{87,12}$$

Что касается остальных компонент, то из (87,11) следовало бы, что $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha}=0$. В действительности, однако, поправки к ним, вообще говоря, того же порядка величины, что и поправка в g_{00} (см. об этом подробнее в § 106). Невозможность определения этих поправок приведенным выше способом связана с тем, что поправка в $g_{\alpha\beta}$, имеющая тот же порядок величины, что и поправка в g_{00}, привела бы в функции Лагранжа к членам более высокого порядка малости (вследствие того, что в выражении для ds^2 компоненты $g_{\alpha\beta}$ не умножаются на c^2, как это имеет место для g_{00}).

Задача

Вывести уравнение движения (87,3) из принципа наименьшего действия (87,1).

Решение. Имеем:

$$\delta\,ds^2=2ds\,\delta\,ds=\delta\left(g_{ik}\,dx^i\,dx^k\right)=dx^i\,dx^k\,\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l+2g_{ik}\,dx^i\,d\delta x^k.$$

Поэтому

$$\delta S=-mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l+g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\,\delta x^k}{ds}\right\}ds=$$

$$=-mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l-\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds$$

(при интегрировании по частям учтено, что на пределах $\delta x^k=0$). Во втором члене под интегралом заменим индекс k индексом l. Тогда находим, приравнивая нулю коэффициент при произвольной вариации δx^l:

$$\frac{1}{2}u^iu^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{d}{ds}(g_{il}u^i)=\frac{1}{2}u^iu^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-g_{il}\frac{du^i}{ds}-u^iu^k\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}=0.$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}u^i u^k\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right),$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (86,2), получаем:

$$g_{il}\frac{du^l}{ds}+\Gamma_{l,ik}u^i u^k=0.$$

Уравнение (87,3) получается отсюда поднятием индекса l.

§ 88. Постоянное гравитационное поле

Гравитационное поле называют *постоянным*, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0; последнюю называют в таком случае *мировым временем*.

Выбор мирового времени не вполне однозначен. Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все g_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства[1]). Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т. е. произвольный выбор единицы его измерения.

Строго говоря, постоянным может быть лишь поле, создаваемое одним телом. В системе нескольких тел их взаимное гравитационное притяжение приводит к возникновению движения, в результате чего создаваемое ими поле не может быть постоянным.

Если создающее поле тело неподвижно (в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависит от x^0), то оба направления времени эквивалентны. При должном выборе начала отсчета времени во всех точках пространства, интервал ds в этом случае не должен меняться при изменении знака x^0, а потому все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора должны быть тождественно равными нулю. Такие постоянные гравитационные поля мы будем называть *статическими*.

---

[1]) Легко видеть, что при этом преобразовании пространственная метрика, как и следовало, не меняется. Действительно, при замене

$$x^0 \to x^0 + f(x^1, x^2, x^3)$$

с произвольной функцией $f(x^1, x^2, x^3)$ компоненты g_{ik} заменяются согласно

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + g_{00}f_{,\alpha}f_{,\beta} - g_{0\alpha}f_{,\beta} - g_{0\beta}f_{,\alpha},$$
$$g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} - g_{00}f_{,\alpha}, \qquad g_{00} \to g_{00},$$

где $f_{,\alpha} \equiv \partial f/\partial x^\alpha$. При этом, очевидно, трехмерный тензор (84,7) не меняется.