Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}u^i u^k\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right),$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (86,2), получаем:

$$g_{il}\frac{du^l}{ds}+\Gamma_{l,ik}u^i u^k=0.$$

Уравнение (87,3) получается отсюда поднятием индекса l.

§ 88. Постоянное гравитационное поле

Гравитационное поле называют *постоянным*, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0; последнюю называют в таком случае *мировым временем*.

Выбор мирового времени не вполне однозначен. Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все g_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства[1]). Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т. е. произвольный выбор единицы его измерения.

Строго говоря, постоянным может быть лишь поле, создаваемое одним телом. В системе нескольких тел их взаимное гравитационное притяжение приводит к возникновению движения, в результате чего создаваемое ими поле не может быть постоянным.

Если создающее поле тело неподвижно (в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависит от x^0), то оба направления времени эквивалентны. При должном выборе начала отсчета времени во всех точках пространства, интервал ds в этом случае не должен меняться при изменении знака x^0, а потому все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора должны быть тождественно равными нулю. Такие постоянные гравитационные поля мы будем называть *статическими*.

---

[1]) Легко видеть, что при этом преобразовании пространственная метрика, как и следовало, не меняется. Действительно, при замене

$$x^0 \to x^0 + f(x^1, x^2, x^3)$$

с произвольной функцией $f(x^1, x^2, x^3)$ компоненты g_{ik} заменяются согласно

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + g_{00}f_{,\alpha}f_{,\beta} - g_{0\alpha}f_{,\beta} - g_{0\beta}f_{,\alpha},$$
$$g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} - g_{00}f_{,\alpha}, \qquad g_{00} \to g_{00},$$

где $f_{,\alpha} \equiv \partial f/\partial x^\alpha$. При этом, очевидно, трехмерный тензор (84,7) не меняется.

Неподвижность тела, однако, не является обязательным условием постоянства создаваемого им поля. Так, будет постоянным также и поле равномерно вращающегося вокруг своей оси аксиально-симметричного тела. Но в этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны — при изменении знака времени меняется знак угловой скорости вращения. Поэтому в таких постоянных гравитационных полях (которые мы будем называть *стационарными*) компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, отличны от нуля.

Смысл мирового времени в постоянном гравитационном поле заключается в том, что его промежуток между двумя событиями в некоторой точке пространства совпадает с его премежутком между любыми другими двумя событиями в любой другой точке пространства, соответственно одновременными (в выясненном в § 84 смысле) с первой парой событий. Но одинаковым промежуткам мирового времени x^0 соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени τ. Связь (84,1) между ними можно написать теперь в виде

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0, \tag{88,1}$$

применимом к любым конечным промежуткам.

В слабом гравитационном поле можно воспользоваться приближенным выражением (87,12); при этом (88,1) дает, с той же точностью:

$$\tau = \frac{x^0}{c}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,2}$$

Таким образом, собственное время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке пространства, т. е. чем больше его абсолютная величина (ниже, в § 99 будет показано, что потенциал φ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю. Согласно результатам § 84 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всем пространстве.

Заметим также, что для элемента пространственного расстояния в статическом поле имеем просто:

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{88,3}$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всем пространстве невозможна. Поскольку g_{ik} не зависят от x^0, то формулу (84,14) для разности значений мирового

времени двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,4}$$

применимом для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,5}$$

взятому по этому замкнутому контуру[1]).

Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле. Мы видели в § 53, что частота света равна производной от эйконала ψ по времени (с обратным знаком). Частота, измеренная в мировом времени x^0/c, поэтому равна $\omega_0 = -c\partial\psi/\partial x^0$. Поскольку уравнение эйконала (87,9) в постоянном поле не содержит x^0 явно, то частота ω_0 остается постоянной при распространении луча света. Частота же, измеренная в собственном времени, равна $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$; она различна в разных точках пространства.

В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

имеем:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{88,6}$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближенно:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,7}$$

Мы видим, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала гравитационного поля, т. е. при приближении к создающим поле телам; наоборот, при удалении луча от этих тел частота света уменьшается. Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен φ_1, имеет (в этой точке) частоту ω, то, придя в точку с потенциалом

---

[1]) Интеграл (88,5) тождественно равен нулю, если сумма $g_{\alpha 0}\, dx^\alpha/g_{00}$ является полным дифференциалом какой-либо функции пространственных координат. Такой случай, однако, означал бы просто, что мы имеем в действительности дело со статическим полем и преобразованием вида $x^0 \to x^0 + f(x^\alpha)$ все $g_{\alpha 0}$ могут быть обращены в нуль.

φ_2, он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную

$$\frac{\omega}{1-\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1-\frac{\varphi_2}{c^2}\right)\approx\omega\left(1+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}\right).$$

Линейчатый спектр, испускаемый какими-либо атомами, находящимися, например, на Солнце, выглядит там точно так же, как выглядит на Земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами. Если же на Земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на Солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на Земле. Именно, каждая линия с частотой ω будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}\omega, \tag{88,8}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы гравитационного поля соответственно в месте испускания и в месте наблюдения спектра. Если на Земле наблюдается спектр, испускаемый на Солнце или звездах, то $|\varphi_1|>|\varphi_2|$ и из (88,8) следует, что $\Delta\omega<0$, т. е. смещение происходит в сторону меньших частот. Описанное явление называют *красным смещением*.

Происхождение этого явления можно уяснить себе непосредственно на основании сказанного выше о мировом времени. В силу постоянства поля промежуток мирового времени, в течение которого некоторое колебание в световой волне распространится из одной заданной точки пространства в другую, не зависит от x^0. Поэтому число колебаний, происходящих в единицу мирового времени, будет одинаковым во всех точках вдоль луча. Но один и тот же промежуток мирового времени соответствует тем большему промежутку собственного времени, чем дальше мы находимся от создающих поле тел. Следовательно, частота, т. е. число колебаний в единицу собственного времени, будет падать при удалении света от этих масс.

При движении частицы в постоянном поле сохраняется ее энергия, определяемая как производная $(-c\partial S/\partial x^0)$ от действия по мировому времени; это следует, например, из того, что x^0 не входит явно в уравнение Гамильтона — Якоби. Определенная таким образом энергия есть временная компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k=mcu_k=mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2=g_{00}(dx^0)^2-dl^2$, и мы имеем для энергии, которую обозначим здесь посредством $\mathscr{E}_0$:

$$\mathscr{E}_0=mc^2g_{00}\frac{dx^0}{ds}=mc^2g_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2-dl^2}}.$$

Введем скорость частицы:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{c\,dl}{\sqrt{g_{00}}\,dx^0},$$

измеренную в собственном времени, т. е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии:

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{88,9}$$

Это есть та величина, которая остается постоянной при движении частицы.

Легко показать, что выражение (88,9) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если только скорость v измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы. Если частица выходит из точки A в момент мирового времени x^0 и приходит в бесконечно близкую точку B в момент $x^0 + dx^0$, то для определения скорости надо взять теперь не промежуток времени $(x^0 + dx^0) - x^0 = dx^0$, а разность между $x^0 + dx^0$ и моментом $x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$, который одновременен в точке B моменту x^0 в точке A:

$$(x^0 + dx^0) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha.$$

Умножив его на $\sqrt{g_{00}}/c$, получим соответствующий интервал собственного времени, так что скорость

$$v^\alpha = \frac{c\,dx^\alpha}{\sqrt{h}\,(dx^0 - g_\alpha\,dx^\alpha)}, \tag{88,10}$$

где мы ввели обозначения

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \quad h = g_{00} \tag{88,11}$$

для трехмерного вектора $\mathbf{g}$ (упоминавшегося уже в § 84) и для трехмерного скаляра g_{00}. Ковариантные компоненты скорости $\mathbf{v}$ как трехмерного вектора в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ и соответственно квадрат этого вектора надо понимать как[1])

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}v^\beta, \quad v^2 = v_\alpha v^\alpha. \tag{88,12}$$

---

[1]) В дальнейшем мы неоднократно будем вводить в рассмотрение, наряду с 4-векторами и 4-тензорами, также и трехмерные векторы и тензоры, определенные в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$; таковыми являются, в частности, введенные уже векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{v}$. В то время как в первом случае тензорные операции (в том числе поднятие и опускание индексов) производятся с помощью метрического тензора g_{ik}, во втором случае — с помощью тензора $\gamma_{\alpha\beta}$. Во избежание могущих возникнуть в связи с этим недоразумений мы будем обозначать трехмерные величины с помощью символов, не используемых для обозначения четырехмерных величин.

Заметим, что при таком определении интервал ds выражается через скорость формулой, аналогичной обычной формуле:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \\ = h(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 - dl^2 = h(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (88,13)$$

Компоненты 4-скорости $u^i = dx^i/ds$ равны

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (88,14)$$

Энергия же

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 g_{0i}u^i = mc^2 h(u^0 - g_\alpha u^\alpha)$$

и после подстановки (88,14) приобретает вид (88,9).

В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей, подставляя $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ в (88,9), получим приближенно:

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \quad (88,15)$$

где $m\varphi$ — потенциальная энергия частицы в гравитационном поле, что находится в соответствии с функцией Лагранжа (87,10).

Задачи

1. Определить силу, действующую на частицу в постоянном гравитационном поле.

Решение. Для нужных нам компонент Γ^i_{kl} находим следующие выражения:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2}\left(g^\alpha_{;\beta} - g^{;\alpha}_\beta\right) - \frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha}, \quad (1)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{h}{2}\left[g_\beta\left(g^{;\alpha}_\gamma - g^\alpha_{;\gamma}\right) + g_\gamma\left(g^{;\alpha}_\beta - g^\alpha_{;\beta}\right)\right] + \frac{1}{2}g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}.$$

В этих выражениях все тензорные действия (ковариантные дифференцирования, подъем и опускание индексов) производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерным вектором g^α и трехмерным скаляром h (88,11); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ есть трехмерный символ Кристоффеля, составленный из компонент тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как Γ^i_{kl} составляется из компонент g_{ik}; при вычислении использованы формулы (84,9—12).

Подставив (1) в уравнение движения

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^\alpha_{00}(u^0)^2 - 2\Gamma^\alpha_{0\beta}u^0u^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma$$

и используя выражения (88,14) для компонент 4-скорости, после простых преобразований получим:

$$\frac{d}{ds}\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{h^{;\alpha}}{2h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}-\frac{\sqrt{h}\left(g^\alpha_{;\beta}-g^{;\alpha}_\beta\right)v^\beta}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}-$$

$$-\frac{\lambda^\alpha_{\beta\gamma}v^\beta v^\gamma}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (2)$$

Действующая на частицу сила $\mathbf{f}$ есть производная от ее импульса $\mathbf{p}$ по (синхронизованному) собственному времени, определенная с помощью трехмерного ковариантного дифференциала:

$$f^\alpha=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{Dp^\alpha}{ds}=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d}{ds}\frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\lambda^\alpha_{\beta\gamma}\frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из (2) имеем поэтому (для удобства опускаем индекс α):

$$f_\alpha=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{h}+\sqrt{h}\left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{v^\beta}{c}\right\},$$

или в обычных трехмерных векторных обозначениях[1])

$$\mathbf{f}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\operatorname{grad}\ln\sqrt{h}+\sqrt{h}\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\operatorname{rot}\mathbf{g}\right]\right\}. \qquad (3)$$

---

[1]) В трехмерных криволинейных координатах единичный антисимметричный тензор определяется как

$$\eta_{\alpha\beta\gamma}=\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma},\qquad \eta^{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma},$$

где $e_{123}=e^{123}=1$, а при перестановке двух индексов меняют знак (ср. (83,13—14)). Соответственно этому вектор $\mathbf{c}=[\mathbf{ab}]$, определенный как вектор, дуальный антисимметричному тензору $c_{\beta\gamma}=a_\beta b_\gamma-a_\gamma b_\beta$, имеет компоненты

$$c_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}c^{\beta\gamma}=\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}a^\beta b^\gamma,\qquad c^\alpha=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}c_{\beta\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma.$$

Обратно:

$$c_{\alpha\beta}=\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}c^\gamma,\qquad c^{\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}c_\gamma.$$

В частности, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ надо понимать в этом же смысле как вектор, дуальный тензору $a_{\beta;\alpha}-a_{\alpha;\beta}=\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta}$, так что его контравариантные компоненты

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})^\alpha=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}-\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma}\right).$$

Отметим, что если тело неподвижно, то действующая на него сила (первый член в (3)) имеет потенциал. При малых скоростях движения второй член в (3) имеет вид $mc\sqrt{h}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}]$, аналогичный силе Кориолиса, которая возникла бы (при отсутствии поля) в системе координат, вращающейся с угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{h}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}.$$

2. Вывести принцип Ферма для распространения лучей в постоянном гравитационном поле.

Решение. Принцип Ферма (см. § 53) гласит:

$$\delta\int k_\alpha\,dx^\alpha = 0,$$

где интеграл берется вдоль луча, а подынтегральное выражение должно быть выражено через постоянную вдоль луча частоту ω_0 и дифференциалы координат. Замечая, что $k_0 = -\partial\psi/\partial x^0 = \omega_0/c$, пишем:

$$\frac{\omega_0}{c} = k_0 = g_{0i}k^i = g_{00}k^0 + g_{0\alpha}k^\alpha = h\left(k^0 - g_\alpha k^\alpha\right).$$

Подставляя это в соотношение $k_ik^i = g_{ik}k^ik^k = 0$, написанное в виде

$$h\left(k^0 - g_\alpha k^\alpha\right)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0,$$

получим:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0.$$

Учитывая также, что вектор k^α должен иметь направление вектора dx^α, находим отсюда:

$$k^\alpha = \frac{\omega_0}{c\sqrt{h}}\,\frac{dx^\alpha}{dl},$$

где dl (84,6) есть элемент пространственного расстояния вдоль луча. Чтобы получить выражение для k_α, пишем:

$$k^\alpha = g^{\alpha i}k_i = g^{\alpha 0}k_0 + g^{\alpha\beta}k_\beta = -g^\alpha\frac{\omega_0}{c} - \gamma^{\alpha\beta}k_\beta,$$

откуда

$$k_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta}\left(k^\beta + \frac{\omega_0}{c}g^\beta\right) = -\frac{\omega_0}{c}\left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{h}}\,\frac{dx^\beta}{dl} + g_\alpha\right).$$

Наконец, умножая на dx^α, получим принцип Ферма в виде (постоянный множитель ω_0/c опускаем)

$$\delta\int\left(\frac{dl}{\sqrt{h}} + g_\alpha\,dx^\alpha\right) = 0.$$

Упомянем также в этой связи, что трехмерная дивергенция вектора

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\gamma}\,a^\alpha\right)$$

(ср. (86,9)).

Во избежание недоразумений при сравнении с формулами, часто применяемыми для трехмерных векторных операций в ортогональных криволинейных координатах (см., например, «Электродинамика сплошных сред», приложение), укажем, что в этих формулах под компонентами вектора подразумеваются величины $\sqrt{g_{11}}\,A^1\,(=\sqrt{A_1A^1})$, $\sqrt{g_{22}}\,A^2$, $\sqrt{g_{33}}\,A^3$.

В статическом поле имеем просто:

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{h}} = 0.$$

Обращаем внимание на то, что в гравитационном поле луч распространяется не по кратчайшей линии в пространстве, так как последняя определялась бы уравнением $\delta \int dl = 0$.

§ 89. Вращение

Особым случаем стационарных гравитационных полей является поле, возникающее при переходе к равномерно вращающейся системе отсчета.

Для определения интервала ds произведем преобразование от неподвижной (инерциальной) системы к равномерно вращающейся. В неподвижной системе координат r', φ', z', t (мы пользуемся цилиндрическими пространственными координатами) интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r'^2d\varphi'^2 - dz'^2. \qquad (89,1)$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут r, φ, z. Если ось вращения совпадает с осями z и z', то имеем $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω — угловая скорость вращения. Подставляя в (89,1), находим искомое выражение для интервала во вращающейся системе отсчета:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi\, dt - dz^2 - r^2\, d\varphi^2 - dr^2. \qquad (89,2)$$

Необходимо отметить, что вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний, равных c/Ω. Действительно, из (89.2) видно, что при $r > c/\Omega$ величина g_{00} становится отрицательной, что недопустимо. Неприменимость вращающейся системы отсчета на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей скорости света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Производя синхронизацию вдоль некоторой замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на величину (см. (88,5))

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2\, d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

или, предполагая, что $\Omega r/c \ll 1$ (т. е. скорость вращения мала по сравнению со скоростью света),

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2\, d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S, \qquad (89,3)$$