В статическом поле имеем просто:

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{h}} = 0.$$

Обращаем внимание на то, что в гравитационном поле луч распространяется не по кратчайшей линии в пространстве, так как последняя определялась бы уравнением $\delta \int dl = 0$.

§ 89. Вращение

Особым случаем стационарных гравитационных полей является поле, возникающее при переходе к равномерно вращающейся системе отсчета.

Для определения интервала ds произведем преобразование от неподвижной (инерциальной) системы к равномерно вращающейся. В неподвижной системе координат r', φ', z', t (мы пользуемся цилиндрическими пространственными координатами) интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r'^2d\varphi'^2 - dz'^2. \qquad (89,1)$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут r, φ, z. Если ось вращения совпадает с осями z и z', то имеем $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω — угловая скорость вращения. Подставляя в (89,1), находим искомое выражение для интервала во вращающейся системе отсчета:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi\, dt - dz^2 - r^2\, d\varphi^2 - dr^2. \qquad (89,2)$$

Необходимо отметить, что вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний, равных c/Ω. Действительно, из (89.2) видно, что при $r > c/\Omega$ величина g_{00} становится отрицательной, что недопустимо. Неприменимость вращающейся системы отсчета на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей скорости света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Производя синхронизацию вдоль некоторой замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на величину (см. (88,5))

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2\, d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

или, предполагая, что $\Omega r/c \ll 1$ (т. е. скорость вращения мала по сравнению со скоростью света),

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2\, d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S, \qquad (89,3)$$

где S — площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак $+$ или $-$ имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения).

Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка v/c время t, которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света, по определению, всегда равна c, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии и в каждой точке пользуемся собственным временем. Поскольку разница между собственным и мировым временем — порядка v^2/c^2, то при вычислении искомого промежутка времени t с точностью до величин порядка v/c этой разницей можно пренебречь. Поэтому имеем:

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

где L — длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t, оказывается равной

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}. \tag{89,4}$$

Эту формулу, как и формулу для первого приближения эффекта Доплера, можно легко вывести и чисто классическим путем.

Задача

Определить элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат.

Решение. С помощью (84,6—7) находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2\, d\varphi^2}{1 - \Omega^2 \frac{r^2}{c^2}},$$

чем определяется пространственная геометрия во вращающейся системе отсчета. Отметим, что отношение длины окружности в плоскости $z = \text{const}$ (с центром на оси вращения) к ее радиусу r равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi.$$

§ 90. Уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля

Уравнения электромагнитного поля специальной теории относительности легко обобщить так, чтобы они были применимы в любой четырехмерной криволинейной системе координат, т. е. в случае наличия гравитационного поля.