где S — площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак $+$ или $-$ имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения).

Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка v/c время t, которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света, по определению, всегда равна c, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии и в каждой точке пользуемся собственным временем. Поскольку разница между собственным и мировым временем — порядка v^2/c^2, то при вычислении искомого промежутка времени t с точностью до величин порядка v/c этой разницей можно пренебречь. Поэтому имеем:

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

где L — длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t, оказывается равной

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}. \tag{89,4}$$

Эту формулу, как и формулу для первого приближения эффекта Доплера, можно легко вывести и чисто классическим путем.

Задача

Определить элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат.

Решение. С помощью (84,6—7) находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2\, d\varphi^2}{1 - \Omega^2 \frac{r^2}{c^2}},$$

чем определяется пространственная геометрия во вращающейся системе отсчета. Отметим, что отношение длины окружности в плоскости $z = \text{const}$ (с центром на оси вращения) к ее радиусу r равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi.$$

§ 90. Уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля

Уравнения электромагнитного поля специальной теории относительности легко обобщить так, чтобы они были применимы в любой четырехмерной криволинейной системе координат, т. е. в случае наличия гравитационного поля.

Тензор электромагнитного поля в специальной теории относительности определялся как $F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Очевидно, что теперь он должен быть соответственно определен как $F_{ik}=A_{k;i}-A_{i;k}$. Но в силу (86,12)

$$F_{ik}=A_{k;i}-A_{i;k}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{90,1}$$

так что связь F_{ik} с потенциалом A_i не меняется. Вследствие этого первая пара уравнений Максвелла (26,5)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}=0 \tag{90,2}$$

тоже сохраняет свой вид[1]).

Для того чтобы написать вторую пару уравнений Максвелла, надо предварительно определить в криволинейных координатах 4-вектор тока. Это мы сделаем аналогично тому, как мы поступали в § 28. Пространственный элемент объема, построенного на элементах пространственных координат dx^1, dx^2, dx^3, есть $\sqrt{\gamma}\,dV$, где γ — определитель пространственного метрического тензора (84,7), а $dV=dx^1dx^2dx^3$ (см. примечание на стр. 302). Введем плотность зарядов ρ согласно определению $de=\rho\sqrt{\gamma}\,dV$, где de — заряд, находящийся в элементе объема $\sqrt{\gamma}\,dV$. Умножив это равенство с обеих сторон на dx^i, имеем:

$$de\,dx^i=\rho\,dx^i\sqrt{\gamma}\,dx^1\,dx^2\,dx^3=\frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{-g}\,d\Omega\,\frac{dx^i}{dx^0}$$

(мы использовали формулу $-g=\gamma g_{00}$ (84,10)). Произведение $\sqrt{-g}\,d\Omega$ есть инвариантный элемент 4-объема, так что 4-вектор тока определяется выражением

$$j^i=\frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^i}{dx^0} \tag{90,3}$$

(величины dx^i/dx^0 — скорости изменения координат со «временем» x^0 — сами не составляют 4-вектора!). Компонента j^0 4-вектора тока, умноженная на $\sqrt{g_{00}}/c$, есть пространственная плотность зарядов.

Для точечных зарядов плотность ρ выражается суммой δ-функций аналогично формуле (28,1). При этом, однако, надо уточнить определение этих функций в случае криволинейных

[1]) Легко видеть, что это уравнение может быть записано также и в виде

$$F_{ik;l}+F_{li;k}+F_{kl;i}=0,$$

откуда очевидна его ковариантность.

координат. Мы будем понимать $\delta(\mathbf{r})$ по-прежнему как произведение $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$ вне зависимости от геометрического смысла координат x^1, x^2, x^3; тогда равен единице интеграл по dV (а не по $\sqrt{\gamma}\,dV$): $\int \delta(\mathbf{r})\,dV = 1$. С таким определением δ-функций плотность зарядов

$$\rho = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\gamma}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a),$$

а 4-вектор тока

$$j^i = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\frac{dx^i}{dx^0}. \tag{90,4}$$

Сохранение заряда выражается уравнением непрерывности, которое отличается от (29,4) лишь заменой обычных производных ковариантными:

$$j^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,j^i\right) = 0 \tag{90,5}$$

(использована формула (86,9)).

Аналогичным образом обобщается вторая пара уравнений Максвелла (30,2); заменяя в них обычные производные ковариантными, находим:

$$F^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,F^{ik}\right) = -\frac{4\pi}{c}\,j^i \tag{90,6}$$

(использована формула (86,10)).

Наконец, уравнения движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях получаются заменой в (23,4) 4-ускорения du^i/ds на Du^i/ds:

$$mc\frac{Du^i}{ds} = mc\left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l\right) = \frac{e}{c}F^{ik}u_k. \tag{90,7}$$

Задача

Написать уравнения Максвелла в заданном гравитационном поле в трехмерной форме (в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$), введя 3-векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и антисимметричные 3-тензоры $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ согласно определениям

$$\begin{aligned} E_\alpha &= F_{0\alpha}, & B_{\alpha\beta} &= F_{\alpha\beta}, \\ D^\alpha &= -\sqrt{g_{00}}\,F^{0\alpha}, & H^{\alpha\beta} &= \sqrt{g_{00}}\,F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Решение. Введенные указанным образом величины не независимы. Раскрывая равенства

$$F_{0\alpha} = g_{0l}g_{\alpha m}F^{lm}, \qquad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha l}g^{\beta m}F_{lm},$$

введя при этом трехмерный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + hg_\alpha g_\beta$ (g и h — из (88,11)) и воспользовавшись формулами (84,9) и (84,12), получим:

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{h}} + g^\beta H_{\alpha\beta}, \qquad B^{\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} + g^\beta E^\alpha - g^\alpha E^\beta. \tag{2}$$

Введем векторы **B**, **H**, дуальные тензорам $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$, согласно определению

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}, \qquad H_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma} \tag{3}$$

(ср. примечание на стр. 327; знак минус введен для того, чтобы в галилеевых координатах векторы **H** и **B** совпадали с обычной напряженностью магнитного поля). Тогда (2) можно записать в виде

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{Hg}], \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{gE}]. \tag{4}$$

Вводя определения (1) в (90,2), получим уравнения:

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial B_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} = 0$$

или, перейдя к дуальным величинам (3):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\mathbf{B}) \tag{5}$$

($x^0 = ct$; определение операций rot и div — в примечании на стр. 327). Аналогичным образом из (90,6) находим уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\gamma}\, D^\alpha) = 4\pi\rho,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{\gamma}\, H^{\alpha\beta}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^0}(\sqrt{\gamma}\, D^\alpha) = -4\pi\rho \frac{dx^\alpha}{dx^0},$$

или в трехмерных векторных обозначениях:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\mathbf{D}) + \frac{4\pi}{c}\mathbf{s}, \tag{6}$$

где $\mathbf{s}$ — вектор с компонентами $s^\alpha = \rho\, dx^\alpha/dt$.

Выпишем для полноты также и уравнение непрерывности (90,5) в трехмерной форме:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\rho) + \operatorname{div} \mathbf{s} = 0. \tag{7}$$

Обратим внимание на аналогию (конечно, чисто формальную) уравнений (5), (6) с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля в материальных средах. В частности, в статическом гравитационном поле в членах с производными по времени выпадает $\sqrt{\gamma}$, а связь (4) сводится к $\mathbf{D} = \mathbf{E}/\sqrt{h}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}/\sqrt{h}$. Можно сказать, что в отношении своего воздействия на электромагнитное поле статическое гравитационное поле играет роль среды с электрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon = \mu = 1/\sqrt{h}$.