

## УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

## § 91. Тензор кривизны

Вернемся снова к понятию о параллельном переносе вектора. Как было указано в § 85, в общем случае кривого 4-пространства бесконечно малый параллельный перенос вектора определяется как перенос, при котором компоненты вектора не меняются в системе координат, галилеевой в данном бесконечно малом элементе объема.

Если  $x^i = x^i(s)$  есть параметрическое уравнение некоторой кривой ( $s$  — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то вектор  $u^i = dx^i/ds$  есть единичный вектор, касательный к кривой. Если рассматриваемая кривая является геодезической, то вдоль нее  $Du^i = 0$ . Это значит, что если вектор  $u^i$  подвергнуть параллельному переносу из точки  $x^i$  на геодезической линии в точку  $x^i + dx^i$  на той же линии, то он совпадает с вектором  $u^i + du^i$ , касательным к линии в точке  $x^i + dx^i$ . Таким образом, при передвижении вдоль геодезической линии вектор касательной переносится параллельно самому себе.

С другой стороны, при параллельном переносе двух векторов «угол» между ними остается, очевидно, неизменным. Поэтому мы можем сказать, что при параллельном переносе любого вектора вдоль какой-либо геодезической линии угол между этим вектором и касательной к линии остается неизменным. Другими словами, при параллельном переносе вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменными.

Весьма существенно, что в кривом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если он совершается по разным путям. В частности, отсюда следует, что если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой.

Для того чтобы уяснить это, рассмотрим двухмерное искривленное пространство, т. е. какую-нибудь кривую поверхность. На рис. 19 изображен кусок такой поверхности, ограниченный тремя геодезическими линиями. Подвергнем вектор  $\mathbf{l}$  параллельному переносу вдоль контура, образованного этими линиями,

При передвижении вдоль линии  $AB$  вектор 1, сохраняя все время одинаковый угол с этой линией, перейдет в вектор 2. При передвижении вдоль  $BC$  он таким же образом перейдет в 3. Наконец, при движении из  $C$  в  $A$  вдоль кривой  $CA$ , сохраняя постоянный угол с этой кривой, рассматриваемый вектор перейдет в  $1'$ , не совпадающий с вектором 1.

Выведем общую формулу, определяющую изменение вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура. Это изменение  $\Delta A_k$  можно записать в виде  $\oint \delta A_k$ , где интеграл берется по данному контуру. Подставляя вместо  $\delta A_k$  выражение (85,5), имеем:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma_{kl}^i A_i dx^l; \quad (91,1)$$

стоящий под интегралом вектор  $A_i$  меняется по мере его переноса вдоль контура.

Для дальнейшего преобразования этого интеграла необходимо заметить следующее. Значения вектора  $A_i$  в точках внутри контура неоднозначны — они зависят от пути, по которому мы приходим в данную точку. Мы увидим, однако, из получаемого ниже результата, что эта неоднозначность — второго порядка малости. Поэтому с достаточной для преобразования точностью до величин первого порядка можно считать компоненты вектора  $A_i$  в точках внутри бесконечно малого контура однозначно определяющимися их значениями на самом контуре по формулам  $\delta A_i = \Gamma_{il}^n A_n dx^l$ , т. е. по производным

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma_{il}^n A_n. \quad (91,2)$$

Применяя теперь к интегралу (91,1) теорему Стокса (6,19) и учитывая, что площадь огибающей рассматриваемым контуром поверхности есть бесконечно малая величина  $\Delta f^{lm}$ , получим:

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\Gamma_{km}^l A_l)}{\partial x^l} - \frac{\partial (\Gamma_{kl}^m A_l)}{\partial x^m} \right] \Delta f^{lm} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{km}^l}{\partial x^l} A_l - \frac{\partial \Gamma_{kl}^m}{\partial x^m} A_l + \Gamma_{km}^l \frac{\partial A_l}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^m \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \right] \Delta f^{lm}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения производных из (91,2), находим окончательно:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta f^{lm}, \quad (91,3)$$

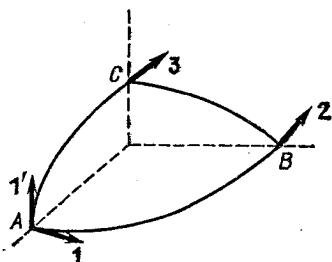


Рис. 19

где  $R^i_{klm}$  — тензор 4-го ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^m_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^m_{kl}. \quad (91,4)$$

Тензорный характер  $R^i_{klm}$  виден из того, что в (91,3) слева стоит вектор — разность  $\Delta A_k$  значений вектора в одной и той же точке. Тензор  $R^i_{klm}$  называется *тензором кривизны* или *тензором Римана*.

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора  $A^k$ . Для этого заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то  $\Delta(A^k B_k) = 0$ , где  $B_k$  — любой ковариантный вектор. С помощью (91,3) имеем отсюда:

$$\begin{aligned} \Delta(A^k B_k) &= A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_l R^i_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k = \\ &= B_k \left( \Delta A^k + \frac{1}{2} A^l R^k_{ilm} \Delta f^{lm} \right) = 0, \end{aligned}$$

или, ввиду произвольности вектора  $B_k$ :

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm} A^l \Delta f^{lm}. \quad (91,5)$$

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор  $A_l$  по  $x^k$  и по  $x^l$ , то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных. Оказывается, что разность  $A_{l;k;l} - A_{l;l;k}$  определяется тем же тензором кривизны, который мы ввели выше. Именно, имеет место формула

$$A_{l;k;l} - A_{l;l;k} = A_m R^m_{ikl}, \quad (91,6)$$

которую легко проверить непосредственным вычислением в локально-геодезической системе координат. Аналогично, для контравариантного вектора<sup>1)</sup>

$$A^l_{;k;l} - A^l_{;l;k} = -A^m R^l_{mkl}. \quad (91,7)$$

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров (это проще всего сделать, рассматривая, например, тензор вида  $A_i B_k$  и пользуясь при этом формулами (91,6—7); полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют место для любого тензора  $A_{ik}$ ). Так,

$$A_{ik;l;m} - A_{ik;m;l} = A_{in} R^n_{iklm} + A_{nk} R^n_{ilm}. \quad (91,8)$$

Очевидно, что в плоском 4-пространстве тензор кривизны равен нулю. Действительно, в плоском пространстве можно вы-

<sup>1)</sup> Формулу (91,7) можно получить также и непосредственно из (91,6) путем поднятия индекса  $i$  и использования свойств симметрии тензора  $R_{iklm}$  (§ 92).

брать координаты, в которых везде все  $\Gamma_{kl}^i = 0$ , а потому и  $R^i_{klm} = 0$ . В силу тензорного характера  $R^i_{klm}$  эти величины равны тогда нулю и в любой другой системе координат. Это соответствует тому, что в плоском пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется.

Имеет место и обратная теорема: если  $R^i_{klm} = 0$ , то 4-пространство плоское. Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, галилееву в данном бесконечно малом участке. При  $R^i_{klm} = 0$  параллельный перенос есть однозначная операция, и, перенося таким образом галилееву систему из данного малого участка во все остальные, можно построить галилееву систему во всем пространстве, чем и доказывается сделанное утверждение.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли 4-пространство плоским или искривленным.

Заметим, что хотя в кривом пространстве и можно выбрать локально-геодезическую (для данной точки) систему координат, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от  $\Gamma_{kl}^i$  не обращаются в нуль вместе с самими  $\Gamma_{kl}^i$ ).

### Задачи

1. Определить относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям.

**Решение.** Рассмотрим семейство геодезических линий, отличаемых значениями некоторого параметра  $v$ ; другими словами, координаты мировой точки выражаются в виде функций  $x^i = x^i(s, v)$ , таких, что при каждом  $v = \text{const}$  это есть уравнение геодезической (причем  $s$  — длина интервала, отсчитываемого вдоль линии от ее точки пересечения с некоторой заданной гиперповерхностью). Введем 4-вектор

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v} \delta v \equiv v^i \delta v,$$

соединяющий на бесконечно близких геодезических (отвечающих значениям параметра  $v$  и  $v + \delta v$ ) точки с одинаковыми значениями  $s$ .

Из определения ковариантной производной и равенства  $du^i/dv = \delta v^i/\delta s$  (где  $u^i = dx^i/ds$ ) следует, что

$$u^i;_k v^k = v^i;_k v^k. \quad (1)$$

Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = (v^i;_k v^k);_l u^l = (u^i;_k v^k);_l u^l = u^i;_k;_l v^k u^l + u^i;_k v^k;_l u^l.$$

Во втором члене снова используем (1), а в первом меняем порядок ковариантных дифференцирований с помощью (91,7) и находим:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = (u^i;_l u^l);_k v^k + u^m R^i_{mk l} u^k v^l.$$

Первый член равен нулю, поскольку вдоль геодезических линий  $u^i;_i u^i = 0$ . Введя постоянный множитель  $b\nu$ , находим окончательно уравнение:

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = R^i_{klm} u^k u^l \eta^m \quad (2)$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

2. Записать уравнения Максвелла в пустоте для 4-потенциала в лоренцевой калибровке.

**Решение.** Ковариантное обобщение условия (46,9) имеет вид:

$$A^i;_i = 0. \quad (1)$$

Уравнения Максвелла можно, используя формулу (91,7), записать как

$$F_{ik}^{;k} = A_k;_i^{;k} - A_i;_k^{;k} = A_k^{;k};_i + A^m R_{im} - A_i^{;k};_k = 0$$

и  $R_{ik}$  из (92,6). Тогда в силу (1):

$$A_i;_k^{;k} - R_{ik} A^k = 0. \quad (2)$$

## § 92. Свойства тензора кривизны

Тензор кривизны обладает свойствами симметрии, для полного выявления которых следует перейти от смешанных компонент  $R^i_{klm}$  к ковариантным:

$$R_{iklm} = g_{ln} R^n_{klm}.$$

Простыми преобразованиями легко получить для них следующее выражение:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{lm}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + \\ + g_{np} (\Gamma_{kl}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{il}^p). \quad (92,1)$$

Из этого выражения очевидны следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}, \quad (92,2)$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}, \quad (92,3)$$

т. е. тензор антисимметричен по каждой из пар индексов  $ik$  и  $lm$  и симметричен по отношению к перестановке этих двух пар друг с другом. В частности, все компоненты  $R_{iklm}$ , диагональные по паре индексов  $ik$  или  $lm$ , равны нулю.

Далее легко проверить, что равна нулю циклическая сумма из компонент  $R_{iklm}$ , образованная по любым трем из их индексов, например:

$$R_{iklm} + R_{lmki} + R_{ilmk} = 0 \quad (92,4)$$

(остальные соотношения такого рода получаются из (92,4) автоматически в силу свойств (92,2—3)).

Наконец, докажем следующее тождество Бианки:

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0. \quad (92,5)$$