Первый член равен нулю, поскольку вдоль геодезических линий $u^i{}_{;i}u^i = 0$. Введя постоянный множитель δv, находим окончательно уравнение:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i{}_{klm}u^k u^l \eta^m \tag{2}$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

2. Записать уравнения Максвелла в пустоте для 4-потенциала в лоренцевой калибровке.

Решение. Ковариантное обобщение условия (46,9) имеет вид:

$$A^i{}_{;i} = 0. \tag{1}$$

Уравнения Максвелла можно, используя формулу (91,7), записать как

$$F_{ik}{}^{;k} = A_{k;i}{}^{;k} - A_{i;k}{}^{;k} = A_k{}^{;k}{}_{;i} + A^m R_{im} - A_{i;k}{}^{;k} = 0$$

с R_{ik} из (92,6). Тогда в силу (1):

$$A_{i;k}{}^{;k} - R_{ik}A^k = 0. \tag{2}$$

§ 92. Свойства тензора кривизны

Тензор кривизны обладает свойствами симметрии, для полного выявления которых следует перейти от смешанных компонент $R^l{}_{klm}$ к ковариантным:

$$R_{iklm} = g_{in}R^n{}_{klm}.$$

Простыми преобразованиями легко получить для них следующее выражение:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + \\ + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right). \tag{92,1}$$

Из этого выражения очевидны следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}, \tag{92,2}$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}, \tag{92,3}$$

т. е. тензор антисимметричен по каждой из пар индексов ik и lm и симметричен по отношению к перестановке этих двух пар друг с другом. В частности, все компоненты R_{iklm}, диагональные по паре индексов ik или lm, равны нулю.

Далее легко проверить, что равна нулю циклическая сумма из компонент R_{iklm}, образованная по любым трем из их индексов, например:

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0 \tag{92,4}$$

(остальные соотношения такого рода получаются из (92,4) автоматически в силу свойств (92,2—3)).

Наконец, докажем следующее *тождество Бианки*:

$$R^n{}_{ikl;m} + R^n{}_{imk;l} + R^n{}_{ilm;k} = 0. \tag{92,5}$$

Его удобно проверить, воспользовавшись локально-геодезической системой координат. В силу тензорного характера соотношение (92,5) будет тем самым справедливым и в любой другой системе. Дифференцируя выражение (91,4) и полагая затем в нем $\Gamma^i_{kl}=0$, находим в рассматриваемой точке:

$$R^n{}_{ikl;m}=\frac{\partial R^n{}_{ikl}}{\partial x^m}=\frac{\partial^2\Gamma^n_{il}}{\partial x^m\,\partial x^k}-\frac{\partial^2\Gamma^n_{ik}}{\partial x^m\,\partial x^l}.$$

С помощью этого выражения легко убедиться в том, что (92,5) действительно имеет место.

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор второго ранга. Такое упрощение можно произвести только одним способом: упрощение тензора R_{iklm} по индексам i и k или l и m дает нуль в силу антисимметричности по ним, а упрощение по любым другим парам дает, с точностью до знака, одинаковый результат. Мы определим тензор R_{ik} (его называют *тензором Риччи*) как[1])

$$R_{ik}=g^{lm}R_{ilmk}=R^l{}_{ilk}. \tag{92,6}$$

Согласно (91,4) имеем:

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}. \tag{92,7}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik}=R_{ki}. \tag{92,8}$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{il}g^{km}R_{iklm}, \tag{92,9}$$

называемый *скалярной кривизной* пространства.

Компоненты тензора R_{ik} удовлетворяют дифференциальному тождеству, получающемуся упрощением тождества Бианки (92,5) по парам индексов ik и ln:

$$R^l{}_{m;l}=\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m}. \tag{92,10}$$

В силу соотношений (92,2—4) не все компоненты тензора кривизны независимы. Определим число независимых компонент.

Определение тензора кривизны, даваемое написанными выше формулами, относится к пространству любого числа измерений. Рассмотрим сначала случай пространства двух измерений, т. е.

---

[1]) В литературе используется также и другое определение тензора R_{ik} — с упрощением R_{iklm} по первому и последнему индексам. Такое определение отличается знаком от принятого нами определения.

обычную поверхность, обозначим в этом случае (в отличие от четырехмерных величин) тензор кривизны через P_{abcd}, а метрический тензор — через γ_{ab}, где индексы a, b, ... пробегают значения 1, 2. Поскольку в каждой из пар ab и cd два индекса должны иметь различные значения, то очевидно, что все отличные от нуля компоненты тензора кривизны либо совпадают друг с другом, либо отличаются знаком. Таким образом, в этом случае имеется лишь одна независимая компонента, например P_{1212}. Легко найти, что скалярная кривизна при этом равна

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2. \tag{92,11}$$

Величина $P/2$ совпадает с так называемой *гауссовой кривизной* поверхности K:

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}, \tag{92,12}$$

где ρ_1, ρ_2 — главные радиусы кривизны поверхности в данной ее точке (напомним, что ρ_1 и ρ_2 считаются имеющими одинаковые знаки, если соответствующие им центры кривизны расположены по одну сторону от поверхности, и имеющими разные знаки, если центры кривизны лежат по разные стороны от поверхности; в первом случае $K > 0$, а во втором $K < 0$)[1].

Перейдем к тензору кривизны трехмерного пространства; обозначим его через $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, а метрический тензор через $\gamma_{\alpha\beta}$, где индексы α, β, ... пробегают значения 1, 2, 3. Пары индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ пробегают всего три существенно различных набора значений: 23, 31, 12 (перестановка индексов в паре меняет лишь знак компоненты тензора). Поскольку тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по отношению к перестановке этих пар, то имеется всего $3\cdot 2/2 = 3$ независимых компоненты с различными парами индексов, а также 3 компоненты с одинаковыми парами. Тождество (92,4) не прибавляет ничего нового к этим ограничениям. Таким образом, в трехмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Столько же компонент имеет симметричный тензор $P_{\alpha\beta}$. Поэтому из линейных соотношений $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}P_{\gamma\alpha\delta\beta}$ все компоненты тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через $P_{\alpha\beta}$ и метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ (см. задачу 1).

---

[1]) Формулу (92,12) легко получить, написав уравнение поверхности вблизи заданной точки ($x = y = 0$) в виде $z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$. Тогда квадрат элемента длины на ней:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right)dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2}\,dx\,dy.$$

Вычисление P_{1212} в точке $x = y = 0$ по формуле (92,1) (в которой нужны лишь члены со вторыми производными от $\gamma_{\alpha\beta}$ приводят к (92,12).

Если выбрать систему координат, декартову в данной точке, то надлежащим ее поворотом можно привести тензор $P_{\alpha\beta}$ к главным осям[1]). Таким образом, кривизна трехмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами[2]).

Наконец, перейдем к четырехмерному пространству. Пары индексов ik и lm пробегают в этом случае 6 различных наборов значений: 01, 02, 03, 23, 31, 12. Поэтому имеется 6 компонент R_{iklm} с одинаковыми и $6\cdot 5/2 = 15$ компонент с различными парами индексов. Последние, однако, еще не все независимы друг от друга: три компоненты, у которых все четыре индекса различны, связаны в силу (92,4) одним тождеством:

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0. \qquad (92,13)$$

Таким образом, в 4-пространстве тензор кривизны имеет всего 20 независимых компонент.

Выбирая систему координат, галилееву в данной точке, и рассматривая преобразования, поворачивающие эту систему (так что значения g_{ik} в данной точке не меняются), можно добиться обращения в нуль шести компонент тензора кривизны (шесть есть число независимых поворотов 4-системы координат). Таким образом, в общем случае кривизна 4-пространства определяется в каждой точке 14 величинами.

Если $R_{ik} = 0$[3]), то в произвольной системе координат тензор кривизны имеет всего 10 независимых компонент. Надлежащим преобразованием координат можно тогда привести тензор R_{iklm} (в заданной точке 4-пространства) к «каноническому» виду, в котором его компоненты выражаются в общем случае через 4 независимые величины; в особых случаях это число может оказаться даже меньшим.

Если же $R_{ik} \neq 0$, то все то же самое будет относиться к тензору кривизны после выделения из него определенной части,

---

[1]) Для фактического вычисления главных значений тензора $P_{\alpha\beta}$ нет необходимости производить преобразование к системе координат, декартовой в данной точке. Эти значения можно определить как корни λ уравнения $|P_{\alpha\beta} - \lambda\gamma_{\alpha\beta}| = 0$.

[2]) Знание тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ позволяет определить гауссову кривизну K любой поверхности в пространстве. Укажем здесь лишь, что если x^1, x^2, x^3 — ортогональная система координат, то

$$K = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2}$$

есть гауссова кривизна для «плоскости», перпендикулярной (в данной ее точке) к оси x^3; под «плоскостью» понимается поверхность, образованная геодезическими линиями.

[3]) Мы увидим ниже (§ 95), что этим свойством обладает тензор кривизны для гравитационного поля в пустоте.

выражающейся через компоненты R_{ik}. Именно, составим тензор [1])

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2} R_{il} g_{km} + \frac{1}{2} R_{im} g_{kl} + \\ + \frac{1}{2} R_{kl} g_{im} - \frac{1}{2} R_{km} g_{il} + \frac{1}{6} R (g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}). \quad (92,14)$$

Легко видеть, что этот тензор обладает всеми свойствами симметрии тензора R_{iklm}, а при свертывании по паре индексов (il или km) дает нуль.

Покажем, каким образом строится классификация возможных типов канонической формы тензора кривизны при $R_{ik} = 0$ (*А. З. Петров*, 1950).

Будем считать, что метрика в данной точке 4-пространства приведена к галилеевому виду. Совокупность 20 независимых компонент тензора R_{iklm} представим как совокупность трех трехмерных тензоров, определенных следующим образом:

$$A_{\alpha\beta} = R_{0\alpha0\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} e_{\alpha\gamma\delta} e_{\beta\lambda\mu} R_{\gamma\delta\lambda\mu}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\delta} R_{0\beta\gamma\delta} \quad (92,15)$$

($e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор; поскольку трехмерная метрика декартова, нет необходимости делать при суммировании различие между верхними и нижними индексами). Тензоры $A_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}$ по определению симметричны; тензор $B_{\alpha\beta}$, вообще говоря, несимметричен, а его след равен нулю в силу (92,13). Согласно определениям (92,15) имеем, например:

$$B_{11} = R_{0123}, \quad B_{21} = R_{0131}, \quad B_{31} = R_{0112}, \quad C_{11} = R_{2323}, \ \ldots$$

Легко видеть, что условия $R_{km} = g^{il} R_{iklm} = 0$ эквивалентны следующим соотношениям между компонентами тензоров (92,15):

$$A_{\alpha\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}. \quad (92,16)$$

Далее введем симметричный комплексный тензор

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} + 2iB_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}) = A_{\alpha\beta} + iB_{\alpha\beta}. \quad (92,17)$$

Такое объединение двух вещественных трехмерных тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ в один комплексный тензор как раз соответствует объеди-

---

[1]) Это громоздкое выражение можно записать более компактно в виде

$$C_{iklm} = R_{iklm} - R_{l[i} g_{k]m} + R_{m[i} g_{k]l} + \frac{1}{3} R g_{l[i} g_{k]m},$$

где квадратные скобки означают антисимметризацию по заключенным в них индексам:

$$A_{[ik]} = \frac{1}{2} (A_{ik} - A_{ki}).$$

Тензор (92,14) называют *тензором Вейля*.

нению (в § 25) двух векторов **E** и **H** в комплексный вектор **F**, а возникающая в результате связь между $D_{\alpha\beta}$ и 4-тензором R_{iklm} соответствует связи между **F** и 4-тензором F_{ik}. Отсюда следует, что четырехмерные преобразования тензора R_{iklm} эквивалентны трехмерным комплексным поворотам, производимым над тензором $D_{\alpha\beta}$.

По отношению к этим поворотам могут быть определены собственные значения $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ и собственные векторы n_α (вообще говоря, комплексные) как решения системы уравнений

$$D_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n_\alpha. \tag{92,18}$$

Величины λ являются инвариантами тензора кривизны. Поскольку след $D_{\alpha\alpha} = 0$, то равна нулю также и сумма корней уравнения (92,18):

$$\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} = 0.$$

В зависимости от числа независимых собственных векторов n_α мы приходим к следующей классификации возможных случаев приведения тензора кривизны, — к *каноническим типам Петрова* I—III.

I) Имеются три независимых собственных вектора. При этом их квадраты $n_\alpha n^\alpha$ отличны от нуля и соответствующим поворотом тензор $D_{\alpha\beta}$, а с ним и $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ приводятся к диагональному виду:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)\prime} & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)\prime} & & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)\prime} & -\lambda^{(2)\prime} \end{pmatrix},$$
$$B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)\prime\prime} & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)\prime\prime} & & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)\prime\prime} & -\lambda^{(2)\prime\prime} \end{pmatrix}. \tag{92,19}$$

В этом случае тензор кривизны имеет 4 независимых инварианта [1]).

Комплексные инварианты $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ выражаются алгебраически через комплексные скаляры

$$I_1 = \frac{1}{48}(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}\overset{*}{R}{}^{iklm}),$$
$$I_2 = \frac{1}{96}(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik} + iR_{iklm}R^{lmpr}\overset{*}{R}{}_{pr}{}^{ik}), \tag{92,20}$$

где звездочка над буквой означает дуальный тензор:

$$\overset{*}{R}_{iklm} = \frac{1}{2} E_{ikpr} R^{pr}{}_{lm}.$$

---

[1]) Вырожденный случай, когда $\lambda^{(1)\prime} = \lambda^{(2)\prime}$, $\lambda^{(1)\prime\prime} = \lambda^{(2)\prime\prime}$, называют типом D.

Вычислив I_1, I_2 с помощью (92,19), получим:

$$I_1 = \frac{1}{3}(\lambda^{(1)2} + \lambda^{(2)2} + \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}), \quad I_2 = \frac{1}{2}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}). \quad (92,21)$$

Эти формулы позволяют вычислить $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, исходя из значений R_{iklm} в любой системе отсчета.

II) Имеются два независимых собственных вектора. Квадрат одного из них при этом равен нулю, в связи с чем он не может быть принят за направление координатной оси. Можно, однако, принять его лежащим в плоскости x^1, x^2; тогда $n_2 = in_1$, $n_3 = 0$. Соответствующие уравнения (92,18) дают:

$$D_{11} + iD_{12} = \lambda, \quad D_{22} - iD_{12} = \lambda,$$

откуда

$$D_{11} = \lambda - i\mu, \quad D_{22} = \lambda + i\mu, \quad D_{12} = \mu.$$

Комплексная величина $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ является скаляром и не может быть изменена. Величине же μ путем различных комплексных поворотов может быть придано любое (отличное от нуля) значение; можно поэтому без ограничения общности считать ее вещественной. В результате получим следующий канонический тип вещественных тензоров $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu & 0 \\ \mu & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda' \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda'' - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' + \mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda'' \end{pmatrix}. \quad (92,22)$$

В этом случае имеется всего два инварианта λ' и λ''. При этом согласно (92,21) $I_1 = \lambda^2$, $I_2 = \lambda^3$, так что $I_1^3 = I_2^2$.

III) Имеется всего один собственный вектор с равным нулю квадратом. Все собственные значения λ при этом одинаковы, а потому равны нулю. Решения уравнения (92,18) могут быть приведены к виду $D_{11} = D_{22} = D_{12} = 0$, $D_{13} = \mu$, $D_{23} = i\mu$, так что

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (92,23)$$

В этом случае тензор кривизны вовсе не имеет инвариантов, и мы имеем дело со своеобразной ситуацией: 4-пространство искривлено, но не существует инвариантов, которые могли бы являться мерой его кривизны[1]).

Задачи

1. Выразить тензор кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ трехмерного пространства через тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta}$.

Решение. Ищем $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в виде

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta},$$

[1]) Такая же ситуация имеет место в вырожденном случае II при $\lambda' = \lambda'' = 0$ (его называют типом N).

удовлетворяющем условиям симметрии; здесь $A_{\alpha\beta}$ — некоторый симметричный тензор, связь которого с $P_{\alpha\beta}$ определяется путем упрощения написанного выражения по индексам α и γ. Таким путем находим:

$$P_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \qquad A_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} P\gamma_{\alpha\beta},$$

и окончательно:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} + \frac{P}{2}(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

2. Вычислить компоненты тензоров R_{iklm} и R_{ik} для метрики, в которой тензор g_{ik} диагонален.

Решение. Представим отличные от нуля компоненты метрического тензора в виде

$$g_{ii} = e_i e^{2F_i}, \qquad e_0 = 1, \qquad e_\alpha = -1.$$

Вычисление по формуле (92,1) приводит к следующим выражениям для отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{liik} = e_l e^{2F_l}(F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}), \qquad i \neq k \neq l,$$

$$R_{liil} = e_l e^{2F_l}\left(F_{i,i}F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i}\right) + e_i e^{2F_i}\left(F_{l,l}F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l}\right) -$$
$$- e_l e^{2F_l} \sum_{m \neq i,\, l} e_i e_m e^{2(F_i - F_m)} F_{i,m} F_{l,m}, \qquad i \neq l$$

(по повторяющимся индексам нет суммирования!). Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате.

Упрощая тензор по двум индексам, получим:

$$R_{ik} = \sum_{l \neq i,\, k} (F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}), \qquad i \neq k,$$

$$R_{ii} = \sum_{l \neq i} \Big[F_{i,i}F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i} +$$
$$+ e_i e_l e^{2(F_i - F_l)}\Big(F_{l,l}F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l} - F_{i,l} \sum_{m \neq i,\, l} F_{m,l}\Big)\Big].$$

§ 93. Действие для гравитационного поля

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля. Искомые уравнения получаются тогда путем варьирования суммы действий поля и материальных частиц.

Действие S_g, как и действие для электромагнитного поля, должно быть выражено в виде некоторого скалярного интеграла $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$, взятого по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя заданными ее значениями. При этом мы будем исходить из того, что уравнения гравитационного поля должны содержать производные от «потенциалов» поля не выше второго порядка (подобно тому, как это имеет место для уравнений электромагнитного поля). Поскольку уравнения поля получаются путем варьирования действия, то для этого необходимо,