удовлетворяющем условиям симметрии; здесь $A_{\alpha\beta}$ — некоторый симметричный тензор, связь которого с $P_{\alpha\beta}$ определяется путем упрощения написанного выражения по индексам α и γ. Таким путем находим:

$$P_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \qquad A_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} P\gamma_{\alpha\beta},$$

и окончательно:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} + \frac{P}{2}(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

2. Вычислить компоненты тензоров R_{iklm} и R_{ik} для метрики, в которой тензор g_{ik} диагонален.

Решение. Представим отличные от нуля компоненты метрического тензора в виде

$$g_{ii} = e_i e^{2F_i}, \qquad e_0 = 1, \qquad e_\alpha = -1.$$

Вычисление по формуле (92,1) приводит к следующим выражениям для отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{liik} = e_l e^{2F_l}(F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}), \qquad i \neq k \neq l,$$

$$R_{liil} = e_l e^{2F_l}\left(F_{i,i}F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i}\right) + e_i e^{2F_i}\left(F_{l,l}F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l}\right) -$$
$$- e_l e^{2F_l} \sum_{m \neq i,\, l} e_i e_m e^{2(F_i - F_m)} F_{i,m} F_{l,m}, \qquad i \neq l$$

(по повторяющимся индексам нет суммирования!). Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате.

Упрощая тензор по двум индексам, получим:

$$R_{ik} = \sum_{l \neq i,\, k} (F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}), \qquad i \neq k,$$

$$R_{ii} = \sum_{l \neq i} \Big[F_{i,i}F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i} +$$
$$+ e_i e_l e^{2(F_i - F_l)}\Big(F_{l,l}F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l} - F_{i,l} \sum_{m \neq i,\, l} F_{m,l}\Big)\Big].$$

§ 93. Действие для гравитационного поля

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля. Искомые уравнения получаются тогда путем варьирования суммы действий поля и материальных частиц.

Действие S_g, как и действие для электромагнитного поля, должно быть выражено в виде некоторого скалярного интеграла $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$, взятого по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя заданными ее значениями. При этом мы будем исходить из того, что уравнения гравитационного поля должны содержать производные от «потенциалов» поля не выше второго порядка (подобно тому, как это имеет место для уравнений электромагнитного поля). Поскольку уравнения поля получаются путем варьирования действия, то для этого необходимо,

чтобы подынтегральное выражение G содержало производные от g_{ik} не выше первого порядка; таким образом, G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}.

Однако из одних только величин g_{ik} и Γ^i_{kl} невозможно построить скаляр. Это видно уже из того, что посредством соответствующего выбора системы координат можно всегда обратить все величины Γ^i_{kl} в данной точке в нуль. Существует, однако, скаляр R — кривизна 4-пространства, — который хотя и содержит наряду с тензором g_{ik} и его первыми производными еще и вторые производные от g_{ik}, но последние входят только линейно. Благодаря этой линейности инвариантный интеграл $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных. Именно, можно представить его в виде

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \int G\sqrt{-g}\,d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}\,d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные, а подынтегральное выражение во втором интеграле имеет вид дивергенции некоторой величины w^i (подробное вычисление произведено в конце настоящего параграфа). Согласно теореме Гаусса этот второй интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объем, по которому производится интегрирование в двух других интегралах. При варьировании действия вариация второго члена справа, следовательно, исчезает, так как по смыслу принципа наименьшего действия на границах области интегрирования вариация поля равна нулю. Следовательно, мы можем написать:

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Слева стоит скаляр; поэтому скаляром является и стоящее справа выражение (сама же величина G скаляром, конечно, не является).

Величина G удовлетворяет поставленному выше требованию, так как содержит только g_{ik} и его первые производные. Таким образом, мы можем написать:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\,\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\,\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega, \qquad (93,1)$$

где k — новая универсальная постоянная. Аналогично тому, как это было сделано в § 27 для действия электромагнитного поля, можно видеть, что постоянная k должна быть положительна (см. конец этого параграфа).

Постоянная k называется *гравитационной постоянной*. Размерность k следует непосредственно из (93,1). Действие имеет

размерность г·см²·с⁻¹; все координаты можно считать имеющими размерность см, а g_{ik} — безразмерными, и, следовательно, R имеет размерность см⁻². В результате находим, что k имеет размерность см³·г⁻¹·с⁻². Ее численное значение равно

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}. \tag{93,2}$$

Заметим, что мы могли бы положить k равной единице (или другому произвольному безразмерному числу). При этом, однако, определился бы выбор единицы для измерения массы[1]).

Вычислим, наконец, величину G в (93,1). Из выражения (92,7) для R_{ik} имеем:

$$\sqrt{-g}\,R = \sqrt{-g}\,g^{ik}R_{ik} = \\ = \sqrt{-g}\left\{g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right\}.$$

В первых двух членах справа имеем:

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right),$$

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{il}\right) - \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right).$$

Опуская полные производные, находим:

$$\sqrt{-g}\,G = \Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right) - \\ - \left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)g^{ik}\sqrt{-g}.$$

С помощью формул (86,5—8) находим, что первые два члена справа равны $\sqrt{-g}$, помноженному на

$$2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk} - \Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} = \\ = g^{ik}\left(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = 2g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right).$$

Окончательно имеем:

$$G = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right). \tag{93,3}$$

Величинами, определяющими гравитационное поле, являются компоненты метрического тензора. Поэтому в принципе наименьшего действия для гравитационного поля варьированию

---

[1]) Если положить $k = c^2$, то масса будет измеряться в сантиметрах, причем 1 см $= 1{,}35 \cdot 10^{28}$ г.

Иногда пользуются вместо k величиной

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1{,}86 \cdot 10^{-27}\ \text{см} \cdot \text{г}^{-1},$$

которую называют эйнштейновой гравитационной постоянной.

подлежат именно величины g_{ik}. Здесь необходимо, однако, сделать следующую существенную оговорку. Именно, мы не можем теперь утверждать, что в реально осуществляющемся поле интеграл действия имеет минимум (а не просто экстремум) по отношению ко всем возможным вариациям g_{ik}. Это связано с тем, что не всякое изменение g_{ik} соответствует изменению метрики пространства-времени, т. е. реальному изменению гравитационного поля. Компоненты g_{ik} меняются уже и при простом преобразовании координат, связанном лишь с переходом от одной системы к другой в одном и том же пространстве-времени. Каждое такое преобразование координат представляет собой, вообще говоря, совокупность четырех (по числу координат) независимых преобразований. Для того чтобы исключить такие не связанные с изменением метрики изменения g_{ik}, можно наложить на них четыре дополнительных условия и потребовать выполнения этих условий при варьировании. Таким образом, в применении к гравитационному полю принцип наименьшего действия утверждает лишь, что можно наложить на g_{ik} такие дополнительные условия, при соблюдении которых действие имеет минимум по отношению к варьированию g_{ik} [1]).

Имея в виду эти замечания, покажем теперь, что гравитационная постоянная должна быть положительной. В качестве указанных четырех дополнительных условий потребуем обращения в нуль трех компонент $g_{0\alpha}$ и постоянства определителя $|g_{\alpha\beta}|$, составленного из компонент $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{0\alpha}=0, \quad |g_{\alpha\beta}|=\text{const};$$

в силу последнего из этих условий будем иметь:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial x^0}|g_{\alpha\beta}|=0.$$

Нас интересуют здесь те члены в подынтегральном выражении в действии, которые содержат производные от g_{ik} по x^0 (ср. стр. 98). Простое вычисление с помощью (93,3) показывает, что такими членами в G являются

$$-\frac{1}{4}g^{00}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

Легко видеть, что эта величина существенно-отрицательна. Действительно, выбирая пространственную систему координат, ко-

---

[1]) Подчеркнем, однако, что все сказанное не влияет на вывод уравнений поля из принципа наименьшего действия (§ 95). Эти уравнения получаются уже в результате требования экстремума действия (т. е. исчезновения его первой вариации), а не обязательно минимума. Поэтому при их выводе можно подвергать варьированию все компоненты g_{ik} независимо.

торая была бы декартовой в данной точке пространства в данный момент времени (так что $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$), получим:

$$-\frac{1}{4} g^{00} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2,$$

и поскольку $g^{00} = 1/g_{00} > 0$, то знак этой величины очевиден.

Достаточно быстрым изменением компонент $g_{\alpha\beta}$ со временем x^0 (в промежутке между двумя пределами интегрирования по dx^0) можно, следовательно, сделать величину $-G$ сколь угодно большой. Если бы постоянная k была отрицательной, то действие при этом неограниченно уменьшалось бы (принимая сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения), т. е. не могло бы иметь минимума.

§ 94. Тензор энергии-импульса

В § 32 было получено общее правило для вычисления тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (32,1) по 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{94,1}$$

(в галилеевых координатах $g = -1$ и S переходит в $\frac{1}{c} \int \Lambda\, dV\, dt$). Интегрирование производится по всему (трехмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т. е. по бесконечной области 4-пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в § 32, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (32,5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть. Для того чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (32,5) надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l} \psi_{ikl}$, причем $\psi_{ikl} = -\psi_{ilk}$.

Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающий тем преимуществом, что он сразу приводит к симметричному выражению.

Произведем в (94,1) преобразование от координат x^i к координатам $x'^i = x^i + \xi^i$, где ξ^i — малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно формулам

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{lm}(x^l) \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = g^{lm} \left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx$$

$$\approx g^{ik}(x^l) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$