торая была бы декартовой в данной точке пространства в данный момент времени (так что $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$), получим:

$$-\frac{1}{4} g^{00} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2,$$

и поскольку $g^{00} = 1/g_{00} > 0$, то знак этой величины очевиден.

Достаточно быстрым изменением компонент $g_{\alpha\beta}$ со временем x^0 (в промежутке между двумя пределами интегрирования по dx^0) можно, следовательно, сделать величину $-G$ сколь угодно большой. Если бы постоянная k была отрицательной, то действие при этом неограниченно уменьшалось бы (принимая сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения), т. е. не могло бы иметь минимума.

§ 94. Тензор энергии-импульса

В § 32 было получено общее правило для вычисления тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (32,1) по 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{94,1}$$

(в галилеевых координатах $g = -1$ и S переходит в $\frac{1}{c} \int \Lambda\, dV\, dt$). Интегрирование производится по всему (трехмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т. е. по бесконечной области 4-пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в § 32, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (32,5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть. Для того чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (32,5) надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l} \psi_{ikl}$, причем $\psi_{ikl} = -\psi_{ilk}$.

Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающий тем преимуществом, что он сразу приводит к симметричному выражению.

Произведем в (94,1) преобразование от координат x^i к координатам $x'^i = x^i + \xi^i$, где ξ^i — малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно формулам

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{lm}(x^l) \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = g^{lm} \left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx$$

$$\approx g^{ik}(x^l) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l, а тензор g^{ik} — функцией прежних координат x^l. Для того чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, разложим $g'^{ik}(x^l+\xi^l)$ по степеням ξ^l. Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^l, мы можем в членах, содержащих ξ^l, написать g^{ik} вместо g'^{ik}. Таким образом, находим:

$$g'^{ik}(x^l)=g^{ik}(x^l)-\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}+g^{il}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+g^{kl}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}.$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $\xi^{i;k}+\xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ^i. Таким образом, находим окончательно преобразование g^{ik} в виде

$$g'^{ik}=g^{ik}+\delta g^{ik},\quad \delta g^{ik}=\xi^{i;k}+\xi^{k;i}. \tag{94,2}$$

Для ковариантных компонент имеем при этом:

$$g'_{ik}=g_{ik}+\delta g_{ik},\quad \delta g_{ik}=-\xi_{i;k}-\xi_{k;i} \tag{94,3}$$

(так, чтобы с точностью до величин первого порядка малости соблюдалось условие $g'_{il}g'^{kl}=\delta_i^k$) [1]).

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде. Пусть, как и в § 32, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S. При преобразовании координат величины q меняются на δq. При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q. Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу «уравнений движения» физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации S по величинам q. Поэтому достаточно писать только члены, связанные с изменением g_{ik}. Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на гра-

---

[1]) Отметим, что уравнения

$$\xi^{i;k}+\xi^{k;i}=0$$

определяют те инфинитезимальные преобразования координат, которые не меняют данной метрики. В литературе их часто называют *уравнениями Киллинга*.

ницах интегрирования $\delta g^{ik}=0$, находим δS в виде [1])

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega=$$

$$=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}d\Omega.$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}=\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}};\qquad(94,4)$$

тогда δS примет вид [2])

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega=-\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}d\Omega\qquad(94,5)$$

(замечаем, что $g^{ik}\delta g_{ik}=-g_{ik}\delta g^{ik}$ и потому $T^{ik}\delta g_{ik}=-T_{ik}\delta g^{ik}$). Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (94,2), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik}:

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;\,k}+\xi^{k;\,i})\sqrt{-g}d\Omega=\frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;\,k}\sqrt{-g}d\Omega.$$

Далее преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S=\frac{1}{c}\int(T_i^k\xi^i)_{;\,k}\sqrt{-g}d\Omega-\int\frac{1}{c}T^k_{i;\,k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega.\qquad(94,6)$$

Первый интеграл с помощью (86,9) может быть написан в виде

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,T_i^k\xi^i)\,d\Omega$$

и преобразован в интеграл по гиперповерхности. Поскольку на

---

[1]) Необходимо подчеркнуть, что введенное здесь обозначение производных по компонентам симметричного тензора g_{ik} имеет, в некотором смысле, символический характер. Именно, производные $\partial F/\partial g_{ik}$ (F — некоторая функция от g_{ik}) имеют, по существу, смысл лишь как выражающие тот факт, что $dF=\frac{\partial F}{\partial g_{ik}}dg_{ik}$. Но в сумму $\frac{\partial F}{\partial g_{ik}}dg_{ik}$ члены с дифференциалами dg_{ik} каждой из компонент с $i\neq k$ входят дважды. Поэтому при дифференцировании конкретного выражения F по какой-либо определенной компоненте g_{ik} с $i\neq k$ мы получили бы величину, вдвое большую, чем то, что мы обозначаем посредством $\partial F/\partial g_{ik}$. Это замечание необходимо иметь в виду, если придавать определенные значения индексам i, k в формулах, в которые входят производные по g_{ik}.

[2]) В рассматриваемом случае десять величин δg_{ik} не независимы, так как являются результатом преобразования координат, которых имеется всего четыре. Поэтому из равенства δS нулю отнюдь не следует, что $T_{ik}=0$!

границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает. Таким образом, приравнивая δS нулю, находим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T^k_{i;\,k}\xi^i \sqrt{-g}\, d\Omega = 0.$$

Ввиду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T^k_{i;\,k} = 0. \tag{94,7}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (32,4) $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik}, определяемый формулой (94,4), должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса, — по крайней мере с точностью до постоянного множителя. Что этот множитель равен единице, легко проверить, производя, например, вычисление по формуле (94,4) для случая электромагнитного поля, когда

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik} = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{lm}g^{il}g^{km}.$$

Таким образом, формула (94,4) дает возможность вычислить тензор энергии-импульса путем дифференцирования Λ по компонентам метрического тензора (и их производным). При этом тензор T_{ik} получается сразу в явно симметричном виде. Формула (94,4) удобна для вычисления тензора энергии-импульса не только в случае наличия гравитационного поля, но и при его отсутствии, когда метрический тензор не имеет самостоятельного смысла и переход к криволинейным координатам производится формально как промежуточный этап при вычислении T_{ik}.

Выражение (33,1) для тензора энергии-импульса электромагнитного поля должно быть написано в криволинейных координатах в виде

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_k{}^l + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right). \tag{94,8}$$

Для макроскопических же тел тензор энергии-импульса равен (ср. (35,2)):

$$T_{ik} = (p+\varepsilon)u_iu_k - pg_{ik}. \tag{94,9}$$

Отметим, что компонента T_{00} всегда положительна [1]):

$$T_{00} \geqslant 0 \tag{94,10}$$

(смешанная же компонента T^0_0 не имеет, вообще говоря, определенного знака).

[1]) Действительно, имеем $T_{00} = \varepsilon u_0^2 + p\left(u_0^2 - g_{00}\right)$. Первый член, очевидно, положителен. Во втором же члене пишем:

$$u_0 = g_{00}u^0 + g_{0\alpha}u^\alpha = \frac{g_{00}\,dx^0 + g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{ds}$$

и после простого преобразования получим $g_{00}p(dl/ds)^2$, где dl — элемент пространственного расстояния (84,6); отсюда видно, что и второй член в T_{00} положителен. В том же самом легко убедиться и для тензора (94,8).

Задача

Рассмотреть возможные типы приведения к каноническому виду симметричного тензора второго ранга.

Решение. Приведение симметричного тензора A_{ik} к главным осям означает нахождение таких «собственных векторов» n^i, для которых

$$A_{ik}n^k = \lambda n_i. \tag{1}$$

Соответствующие главные значения λ получаются как корни уравнения 4-й степени

$$|A_{ik} - \lambda g_{ik}| = 0 \tag{2}$$

и являются инвариантами тензора. Как величины λ, так и соответствующие им собственные векторы могут оказаться комплексными. (Компоненты же самого тензора A_{ik} предполагаются, разумеется, вещественными.)

Из уравнений (1) легко показать обычным путем, что два вектора $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$, соответствующих двум различным главным значениям $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$, взаимно ортогональны:

$$n_i^{(1)}n^{(2)\,i} = 0. \tag{3}$$

В частности, если уравнение (2) имеет комплексно-сопряженные корни λ и λ^*, которым соответствуют комплексно-сопряженные векторы n_i и $\overset{*}{n}_i$, то должно быть

$$n_i n^{i*} = 0. \tag{4}$$

Тензор A_{ik} выражается через свои главные значения и соответствующие собственные векторы формулой

$$A_{ik} = \sum \lambda \frac{n_i n_k}{n_l n^l} \tag{5}$$

(если только какое-либо из $n_l n^l$ не равно нулю — см. ниже).

В зависимости от характера корней уравнения (2) могут иметь место следующие три различных случая.

I) Все четыре главных значения λ вещественны. При этом вещественны также и векторы n^i, а поскольку все они взаимно ортогональны, то три из них должны иметь пространственное, а один — временное направление (их можно нормировать соответственно условиями $n_l n^l = -1$ и $n_l n^l = 1$). Выбрав направления осей координат вдоль этих векторов, приведем тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

II) Уравнение (2) имеет два вещественных $(\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$ и два комплексно-сопряженных $(\lambda' \pm i\lambda'')$ корня. Комплексно-сопряженные векторы n_i, $\overset{*}{n}_i$, соответствующие двум последним корням, напишем в виде $a_i \pm ib_i$; поскольку они определены лишь с точностью до произвольного комплексного множителя, можно нормировать их условием $n_i n^i = \overset{*}{n}_i \overset{*}{n}{}^{i*} = 1$. Учитывая

также (4), найдем для вещественных векторов a_i, b_i условия:

$$a_i a^i + b_i b^i = 0, \qquad a_i b^i = 0, \qquad a_i a^i - b_i b^i = 1,$$

откуда $a_i a^i = 1/2$, $b_i b^i = -1/2$, т. е. один из этих векторов имеет временное, а другой — пространственное направление[1]). Выбрав координатные оси вдоль векторов a^i, b^i, $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, приведем (согласно (5)), тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & 0 & 0 \\ \lambda'' & -\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

III) Если квадрат одного из векторов n^i равен нулю ($n_i n^i = 0$), то этот вектор не может быть выбран в качестве направления координатной оси. Можно, однако, выбрать одну из плоскостей $x^0 x^\alpha$ так, чтобы вектор n^i лежал в ней. Пусть это будет плоскость $x^0 x^1$. Тогда из $n_i n^i = 0$ следует, что $n^0 = n^1$ и из уравнений (1) имеем:

$$A_{00} + A_{01} = \lambda, \qquad A_{10} + A_{11} = -\lambda,$$

откуда

$$A_{00} = \lambda + \mu, \qquad A_{11} = -\lambda + \mu, \qquad A_{01} = -\mu,$$

где μ — неинвариантная величина, меняющаяся при поворотах в плоскости $x^0 x^1$; должным поворотом она всегда может быть сделана вещественной. Выбирая оси x^2, x^3 по двум другим (пространственным) векторам $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, приведем тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Этот случай соответствует равенству двух корней ($\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$) уравнения (2).

Отметим, что для физического тензора энергии-импульса T_{ik} вещества, движущегося со скоростями, меньшими скорости света, может иметь место лишь первый случай; это связано с тем, что всегда должна существовать такая система отсчета, в которой поток энергии вещества, т. е. компоненты $T_{\alpha 0}$, равен нулю. Для тензора же энергии-импульса электромагнитных волн имеет место третий случай с $\lambda = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$ (ср. стр. 115); можно показать, что в противном случае существовала бы система отсчета, в которой поток энергии превышал умноженную на c ее плотность.

§ 95. Уравнения Эйнштейна

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений гравитационного поля. Эти уравнения получаются из принципа наименьшего действия $\delta(S_m + S_g) = 0$, где S_g и S_m — действия соответственно для гравитационного поля и материи[2]). Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т. е. величины g_{ik}.

---

[1]) Поскольку временное направление должен иметь лишь один из векторов, отсюда следует, что уравнение (2) не может иметь двух пар комплексно-сопряженных корней.

[2]) Вариационный принцип для гравитационного поля указан *Гильбертом* (*D. Hilbert*, 1915).