также (4), найдем для вещественных векторов $a_i$, $b_i$ условия:

$$a_i a^i + b_i b^i = 0, \qquad a_i b^i = 0, \qquad a_i a^i - b_i b^i = 1,$$

откуда $a_i a^i = 1/2$, $b_i b^i = -1/2$, т. е. один из этих векторов имеет временное, а другой — пространственное направление[1]). Выбрав координатные оси вдоль векторов $a^i$, $b^i$, $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, приведем (согласно (5)), тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & 0 & 0 \\ \lambda'' & -\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

III) Если квадрат одного из векторов $n^i$ равен нулю ($n_i n^i = 0$), то этот вектор не может быть выбран в качестве направления координатной оси. Можно, однако, выбрать одну из плоскостей $x^0 x^\alpha$ так, чтобы вектор $n^i$ лежал в ней. Пусть это будет плоскость $x^0 x^1$. Тогда из $n_i n^i = 0$ следует, что $n^0 = n^1$ и из уравнений (1) имеем:

$$A_{00} + A_{01} = \lambda, \qquad A_{10} + A_{11} = -\lambda,$$

откуда

$$A_{00} = \lambda + \mu, \qquad A_{11} = -\lambda + \mu, \qquad A_{01} = -\mu,$$

где $\mu$ — неинвариантная величина, меняющаяся при поворотах в плоскости $x^0 x^1$; должным поворотом она всегда может быть сделана вещественной. Выбирая оси $x^2$, $x^3$ по двум другим (пространственным) векторам $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, приведем тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Этот случай соответствует равенству двух корней ($\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$) уравнения (2).

Отметим, что для физического тензора энергии-импульса $T_{ik}$ вещества, движущегося со скоростями, меньшими скорости света, может иметь место лишь первый случай; это связано с тем, что всегда должна существовать такая система отсчета, в которой поток энергии вещества, т. е. компоненты $T_{\alpha 0}$, равен нулю. Для тензора же энергии-импульса электромагнитных волн имеет место третий случай с $\lambda = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$ (ср. стр. 115); можно показать, что в противном случае существовала бы система отсчета, в которой поток энергии превышал умноженную на $c$ ее плотность.

## § 95. Уравнения Эйнштейна

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений гравитационного поля. Эти уравнения получаются из принципа наименьшего действия $\delta(S_m + S_g) = 0$, где $S_g$ и $S_m$ — действия соответственно для гравитационного поля и материи[2]). Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т. е. величины $g_{ik}$.

---

[1]) Поскольку временное направление должен иметь лишь один из векторов, отсюда следует, что уравнение (2) не может иметь двух пар комплексно-сопряженных корней.

[2]) Вариационный принцип для гравитационного поля указан *Гильбертом* (*D. Hilbert*, 1915).

Вычислим вариацию $\delta S_g$. Имеем:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left(R_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta R_{ik}\right) d\Omega.$$

Подставляя сюда, согласно (86,4),

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\delta g^{ik},$$

находим:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega + \int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega. \quad (95,1)$$

Для вычисления $\delta R_{ik}$ заметим, что хотя величины $\Gamma^i_{kl}$ и не составляют тензора, но их вариации $\delta\Gamma^i_{kl}$ образуют тензор. Действительно, $\Gamma^k_{il} A_k dx$ есть изменение вектора при параллельном переносе (см. (85,5)) из некоторой точки $P$ в бесконечно близкую к ней $P'$. Поэтому $\delta\Gamma^k_{il} A_k dx^l$ есть разность двух векторов, получающихся соответственно при двух параллельных переносах (с неварьированными и варьированными $\Gamma^i_{kl}$) из точки $P$ в одну и ту же точку $P'$. Разность же двух векторов в одной и той же точке является вектором, а потому $\delta\Gamma^i_{kl}$ есть тензор.

Воспользуемся локально-геодезической системой координат. Тогда в данной точке все $\Gamma^i_{kl} = 0$. С помощью выражения (92,7) для $R_{ik}$ имеем (помня, что первые производные от $g^{ik}$ равны теперь нулю):

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}\right\} =$$
$$= g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik} = \frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

где

$$w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}.$$

Поскольку $w^l$ есть вектор, то мы можем написать полученное соотношение в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, w^l\right)$$

(заменяя $\partial w^l/\partial x^l$ на $w^l_{;l}$ и пользуясь (86,9)). Следовательно, второй интеграл справа в (95,1) равен

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \frac{\partial\sqrt{-g}\, w^l}{\partial x^l}\, d\Omega$$

и по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от $w^l$ по гиперповерхности, охватывающей весь 4-объем. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна нулю, то этот член исчезает. Таким образом, вариация $\delta S_g$ равна [1])

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (95,2)$$

Заметим, что если бы мы исходили из выражения

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

для действия поля, то мы получили бы, как легко убедиться,

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}d\Omega.$$

Сравнивая это с (95,2), находим следующее соотношение:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}. \qquad (95,3)$$

Для вариации действия материи можно написать согласно (94,5)

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \qquad (95,4)$$

где $T_{ik}$ — тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле). Гравитационное взаимодействие играет роль только для тел с достаточно большой массой (благодаря малости гравитационной постоянной). Поэтому при исследовании гравитационного поля нам приходится обычно иметь дело с макроскопическими телами. Соответственно этому для $T_{ik}$ надо обычно писать выражение (94,9).

Таким образом, из принципа наименьшего действия $\delta S_m + \delta S_g = 0$ находим:

$$-\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R-\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0,$$

---

[1]) Отметим здесь следующее любопытное обстоятельство. Если вычислять вариацию $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ (с $R_{ik}$ из (92,7)), рассматривая $\Gamma^i_{kl}$ как независимые переменные, а $g_{ik}$ — как постоянные, после чего воспользоваться выражениями (86,3) для $\Gamma^i_{kl}$, то мы получили бы, как легко убедиться, тождественно нуль. Обратно, можно было бы определить связь между $\Gamma^i_{kl}$ и метрическим тензором, если потребовать обращения указанной вариации в нуль.

откуда ввиду произвольности $\delta g^{ik}$

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}, \tag{95,5}$$

или в смешанных компонентах

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k. \tag{95,6}$$

Это и есть искомые *уравнения гравитационного поля* — основные уравнения общей теории относительности. Их называют *уравнениями Эйнштейна.*

Упрощая (95,6) по индексам $i$ и $k$, находим:

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4} T \tag{95,7}$$

$(T = T_i^i)$. Поэтому уравнения поля можно написать также в виде

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left( T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right). \tag{95,8}$$

Уравнения Эйнштейна нелинейны. Поэтому для гравитационных полей несправедлив принцип суперпозиции. Этот принцип справедлив лишь приближенно для слабых полей, допускающих линеаризацию уравнений Эйнштейна (к ним относятся, в частности, гравитационные поля в классическом, ньютоновском пределе — см. § 99).

В пустом пространстве $T_{ik} = 0$ и уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям

$$R_{ik} = 0. \tag{95,9}$$

Напомним, что это отнюдь не значит, что пустое пространство-время является плоским, — для этого требовалось бы выполнение более сильных условий $R_{iklm} = 0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает тем свойством, что $T_i^i = 0$ (см. (33,2)). Ввиду (95,7) отсюда следует, что при наличии одного только электромагнитного поля без каких-либо масс скалярная кривизна пространства-времени равна нулю.

Как мы знаем, дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю:

$$T_{i;\,k}^k = 0. \tag{95,10}$$

Поэтому должна быть равна нулю также и дивергенция левой части уравнения (95,6). Это действительно так в силу тождества (92,10).

Таким образом, уравнения (95,10) по существу содержатся в уравнениях поля (95,6). С другой стороны, уравнения (95,10), выражая собой законы сохранения энергии и импульса, содержат в себе уравнения движения той физической системы, к кото-

рой относится рассматриваемый тензор энергии-импульса (т. е. уравнения движения материальных частиц или вторую пару уравнений Максвелла). Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат в себе также и уравнения для самой материи, которая создает это поле. Поэтому распределение и движение материи, создающей гравитационное поле, отнюдь не могут быть заданы произвольным образом. Напротив, они должны быть определены (посредством решения уравнений поля при заданных начальных условиях) одновременно с самим создаваемым этой материей полем.

Обратим внимание на принципиальное отличие этой ситуации от того, что мы имели в случае электромагнитного поля. Уравнения этого поля (уравнения Максвелла) содержат в себе только уравнение сохранения полного заряда (уравнение непрерывности), но не уравнения движения самих зарядов. Поэтому распределение и движение зарядов могут быть заданы произвольным образом, лишь бы полный заряд был постоянным. Заданием этого распределения зарядов определяется тогда посредством уравнений Максвелла создаваемое ими электромагнитное поле.

Надо, однако, уточнить, что для полного определения распределения и движения материи в случае гравитационного поля к уравнениям Эйнштейна надо присоединить еще (не содержащееся, конечно, в них) уравнение состояния вещества, т. е. уравнение, связывающее между собой давление и плотность. Это уравнение должно быть задано наряду с уравнениями поля [1]).

Четыре координаты $x^i$ могут быть подвергнуты произвольному преобразованию. Посредством этого преобразования можно произвольным образом выбрать четыре из десяти компонент тензора $g_{ik}$. Поэтому независимыми неизвестными функциями являются только шесть из величин $g_{ik}$. Далее, четыре компоненты входящей в тензор энергии-импульса материи 4-скорости $u^i$ связаны друг с другом соотношением $u_i u^i = 1$, так что независимыми являются только три из них. Таким образом, мы имеем, как и следовало, десять уравнений поля (95,5) для десяти неизвестных величин: шести из компонент $g_{ik}$, трех из компонент $u^i$ и плотности материи $\varepsilon/c^2$ (или ее давления $p$). Для гравитационного поля в пустоте остается всего шесть неизвестных величин (компонент $g_{ik}$) и соответственно понижается число

---

[1]) Уравнение состояния связывает между собой в действительности не две, а три термодинамические величины, например давление, плотность и температуру вещества. В применениях в теории тяготения это обстоятельство, однако, обычно несущественно, так как используемые здесь приближенные уравнения состояния фактически не зависят от температуры (таковы, например, уравнения $p = 0$ для разреженного вещества, ультрарелятивистское уравнение $p = \varepsilon/3$ для сильно сжатого вещества и т. п.).

независимых уравнений поля: десять уравнений $R_{ik}=0$ связаны четырьмя тождествами (92,10).

Отметим некоторые особенности структуры уравнений Эйнштейна. Они представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Однако в уравнения входят вторые производные по времени не от всех 10 компонент $g_{ik}$. Действительно, из (92,1) видно, что вторые производные по времени содержатся только в компонентах $R_{0\alpha0\beta}$ тензора кривизны, куда они входят в виде члена $-\frac{1}{2}\ddot{g}_{\alpha\beta}$ (точкой обозначаем дифференцирование по $x^0$); вторые же производные от компонент $g_{0\alpha}$ и $g_{00}$ метрического тензора вообще отсутствуют. Ясно поэтому, что и получающийся путем упрощения из тензора кривизны тензор $R_{ik}$, а с ним и уравнения (95,5) тоже содержат вторые производные по времени лишь от шести пространственных компонент $g_{\alpha\beta}$.

Легко также видеть, что эти производные входят лишь в $\overset{\beta}{\alpha}$-уравнения (95,6), т. е. в уравнения

$$R_\alpha^\beta-\frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta R=\frac{8\pi k}{c^4}T_\alpha^\beta. \tag{95,11}$$

Уравнения же $\overset{0}{0}$ и $\overset{0}{\alpha}$, т. е. уравнения

$$R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0,\qquad R_\alpha^0=\frac{8\pi k}{c^4}T_\alpha^0, \tag{95,12}$$

содержат производные по времени лишь первого порядка. В этом можно убедиться, проверив, что при образовании путем свертывания $R_{iklm}$ величин $R_\alpha^0$ и $R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}(R_0^0-R_\alpha^\alpha)$ компоненты вида $R_{0\alpha0\beta}$ действительно выпадают. Еще проще увидеть это из тождества (92,10) записав его в виде

$$\left(R_i^0-\frac{1}{2}\delta_i^0R\right)_{;0}=-\left(R_i^\alpha-\frac{1}{2}\delta_i^\alpha R\right)_{;\alpha} \tag{95,13}$$

$(i=0,1,2,3)$. Старшие производные по времени, входящие в правую часть этого равенства, — вторые производные (фигурирующие в самих величинах $R_i^\alpha$, $R$). Поскольку (95,13) — тождество, то и его левая сторона должна, следовательно, содержать производные по времени не выше второго порядка. Но одно дифференцирование по времени фигурирует уже в нем явным образом; поэтому сами выражения $R_i^0-\frac{1}{2}\delta_i^0R$ могут содержать производные по времени не выше первого порядка.

Более того, левые стороны уравнений (95,12) не содержат также и первых производных $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$ (а лишь производные $\dot{g}_{\alpha\beta}$). Действительно, из всех $\Gamma_{i,kl}$ эти производные содержат только $\Gamma_{\alpha,00}$ и $\Gamma_{0,00}$, а эти величины в свою очередь входят

только в компоненты тензора кривизны вида $R_{0\alpha 0\beta}$, которые, как мы уже знаем, выпадают при образовании левых сторон уравнений (95,12).

Если интересоваться решением уравнений Эйнштейна при заданных начальных (по времени) условиях, то возникает вопрос о том, для скольких величин могут быть произвольно заданы начальные пространственные распределения.

Начальные условия для уравнений второго порядка должны включать начальные распределения как самих дифференцируемых величин, так и их первых производных по времени. Однако поскольку в данном случае уравнения содержат вторые производные лишь от шести $g_{\alpha\beta}$, то в начальных условиях не могут быть произвольно заданы все $g_{ik}$ и $\dot{g}_{ik}$. Так, можно задать (наряду со скоростью и плотностью материи) начальные значения функций $g_{\alpha\beta}$ и $\dot{g}_{\alpha\beta}$, после чего из 4 уравнений (95,12) определятся допустимые начальные значения $g_{0\alpha}$ и $g_{00}$; в уравнениях же (95,11) останутся еще произвольными начальные значения $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$.

В число задаваемых таким образом начальных условий входят, однако, также и функции, произвольность которых связана просто с произволом в выборе 4-системы координат. Между тем реальным физическим смыслом обладает лишь число «физически различных» произвольных функций, которое уже не может быть уменьшено никаким выбором системы отсчета. Из физических соображений легко видеть, что это число равно 8: начальные условия должны задавать распределение плотности материи и трех компонент ее скорости, а также еще четырех величин, характеризующих свободное (не связанное с материей) гравитационное поле (см. ниже § 107); для свободного гравитационного поля в пустоте начальными условиями должны задаваться лишь последние четыре величины.

**Задача**

Написать уравнения постоянного гравитационного поля, выразив все операции дифференцирования по пространственным координатам в виде ковариантных производных в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ (84,7).

**Решение.** Вводим обозначения $g_{00}=h$, $g_{0\alpha}=-hg_\alpha$ (88,11) и трехмерную скорость $v^\alpha$ (88,10). Ниже все операции поднимания и опускания индексов и ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерными векторами $g_\alpha$, $v^\alpha$ и трехмерным скаляром $h$.

Искомые уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

$$x^\alpha \to x^\alpha, \qquad x^0 \to x^0 + f(x^\alpha), \tag{1}$$

не меняющему стационарности поля. Но при таком преобразовании, как легко убедиться (см. примечание на стр. 321), $g_\alpha \to g_\alpha - \partial f/\partial x^\alpha$, а скаляр $h$ и тензор $\gamma_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}+hg_\alpha g_\beta$ не меняются. Ясно поэтому, что искомые уравнения, будучи выражены через $\gamma_{\alpha\beta}$, $h$ и $g_\alpha$, могут содержать $g_\alpha$ лишь

в виде комбинации производных, составляющих трехмерный антисимметричный тензор:

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\,\alpha} - g_{\alpha;\,\beta} = \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{2}$$

инвариантный относительно указанного преобразования. Учитывая это обстоятельство, можно существенно упростить вычисления, полагая (после вычисления всех входящих в $R_{ik}$ производных) $g_\alpha = 0$ и $g_{\alpha;\beta} + g_{\beta;\,\alpha} = 0$ [1]).

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^\alpha h;_\alpha, \qquad \Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^0_{\alpha 0} = \frac{1}{2h} h;_\alpha + \frac{h}{2} g^\beta f_{\alpha\beta} + \ldots, \qquad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2} f_\beta{}^\alpha - \frac{1}{2} g_\beta h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2h}(g_\alpha h;_\beta + g_\beta h;_\alpha) + g_\gamma \lambda^\gamma_{\alpha\beta} + \ldots,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{h}{2}\left(g_\beta f_\gamma{}^\alpha + g_\gamma f_\beta{}^\alpha\right) + \ldots$$

Опущенные здесь члены (вместо которых стоят многоточия) квадратичны по компонентам вектора $g_\alpha$; эти члены заведомо пропадут, когда мы положим $g_\alpha = 0$ после проведения дифференцирований в $R_{ik}$ (92,7). При вычислениях использованы формулы (84,9), (84,12—13); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ — трехмерные символы Кристоффеля, построенные по метрике $\gamma_{\alpha\beta}$. Тензор $T_{ik}$ вычисляется по формуле (94,9) с $u^i$ из (88,14) (причем тоже полагаем $g_\alpha = 0$).

В результате вычислений из (95,8) получаются следующие уравнения:

$$\frac{1}{h} R_{00} = \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{h}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(\frac{\varepsilon + p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}} R^\alpha_0 = -\frac{\sqrt{h}}{2} f^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - \frac{3}{2} f^{\alpha\beta} (\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \frac{p + \varepsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^\alpha}{c}, \tag{4}$$

$$R^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\gamma} f^\beta{}_\gamma - \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})^{;\alpha;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{(p + \varepsilon) v^\alpha v^\beta}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\varepsilon - p}{2} \gamma^{\alpha\beta}\right]. \tag{5}$$

Здесь $P^{\alpha\beta}$ — трехмерный тензор, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как $R^{ik}$ строится из $g_{ik}$ [2]).

---

[1]) Во избежание недоразумений подчеркнем, что изложенный упрощенный способ проведения вычислений, давая правильные уравнения поля, был бы непригоден для вычисления любых компонент $R_{ik}$ самих по себе, поскольку они не инвариантны относительно преобразования (1). В уравнениях (3)—(5) слева указаны те компоненты тензора Риччи, которым в действительности равны написанные выражения. Эти компоненты инвариантны по отношению к преобразованию (1).

[2]) Аналогичным образом уравнения Эйнштейна могут быть написаны и в общем случае зависящей от времени метрики. Наряду с пространственными производными в них будут входить также и производные по времени от величин $\gamma_{\alpha\beta}$, $g_\alpha$, $h$. См. *А. Л. Зельманов*, ДАН СССР 107, 815 (1956).