

§ 96. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи (вместе с электромагнитным полем) выражается уравнением

$$\partial T^{ik} / \partial x^k = 0.$$

Обобщением этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение (94,7)

$$T_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (T_i^k \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0. \quad (96,1)$$

В таком виде, однако, это уравнение, вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было¹⁾. Это обстоятельство связано с тем, что в гравитационном поле должен сохраняться не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем; последний же не учтен в выражении для $T_{i;k}^k$.

Для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей мы поступим следующим образом (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, 1947)²⁾. Выберем систему координат так, чтобы в некоторой заданной точке пространства-времени все первые производные от g_{ik} по координатам обратились в нуль (сами же g_{ik} при этом не должны обязательно иметь галилеевы значения). Тогда в этой точке второй член в уравнении (96,1) обратится в нуль, а в первом можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, так что остается

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_i^k = 0,$$

¹⁾ Действительно, интеграл $\int T_i^k \sqrt{-g} dS_k$ сохраняется лишь при выполнении условия $\frac{\partial \sqrt{-g} T_i^k}{\partial x^k} = 0$, а не (96,1). В этом легко убедиться, произведя в криволинейных координатах те же вычисления, которые были проделаны в § 29 в галилеевых координатах. Достаточно, впрочем, просто заметить, что эти вычисления имеют чисто формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин, как и доказательство теоремы Гаусса, имеющей в криволинейных координатах тот же вид (83,17), что и в декартовых.

²⁾ Может возникнуть мысль применить к гравитационному полю формулу (94,4), подставив в нее $\Lambda = -c^4 G / 16\pi k$. Подчеркнем, однако, что эта формула относится только к физическим системам, описывающимся величинами q , отличными от g_{ik} ; поэтому она неприменима к гравитационному полю, определяющемуся самими величинами g_{ik} . Заметим кстати, что при подстановке в (94,4) G вместо Λ мы получили бы просто нуль, как это непосредственно видно из соотношения (95,3) и уравнений поля в пустоте.

или в контравариантных компонентах

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{lk} = 0.$$

Величины T^{ik} , тождественно удовлетворяющие этому уравнению, могут быть написаны в виде

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl},$$

где η^{ikl} — величины, антисимметричные по индексам k, l :

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

Нетрудно фактически привести T^{ik} к такому виду. Для этого исходим из уравнений поля:

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right),$$

а для R^{ik} имеем согласно (92,1):

$$R^{ik} = \frac{1}{2} g^{lm} g^{kp} g^{ln} \left\{ \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n} \right\}$$

(напоминаем, что в рассматриваемой точке все $\Gamma_{lk}^i = 0$). После простых преобразований тензор T^{ik} может быть приведен к виду,

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \frac{c^4}{16\pi k} \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g) (g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km})] \right\}.$$

Стоящее в фигурных скобках выражение антисимметрично по индексам k, l и есть то, что мы обозначили выше как η^{ikl} . Поскольку первые производные от g_{ik} в рассматриваемой точке равны нулю, то множитель $1/(-g)$ можно вынести из-под знака производной $\partial/\partial x^l$. Введем обозначения

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m} \lambda^{iklm} \quad (96,2)$$

$$\lambda^{iklm} = \frac{c^4}{16\pi k} (-g) (g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km}); \quad (96,3)$$

величины h^{ikl} антисимметричны по индексам k, l :

$$h^{ikl} = -h^{ilk}. \quad (96,4)$$

Тогда можно написать

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} = (-g) T^{ik}.$$

Это соотношение, выведенное в предположении $\partial g_{ik}/\partial x^l = 0$, перестает иметь место при переходе к произвольной системе координат. В общем случае разность $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} - (-g) T^{ik}$ отлична

от нуля; обозначим ее посредством $(-g)t^{ik}$. Тогда будем иметь по определению:

$$(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \quad (96,5)$$

Величины t^{ik} симметричны по индексам i, k :

$$t^{ik} = t^{ki}. \quad (96,6)$$

Это видно непосредственно из их определения, поскольку как тензор T^{ik} , так и производные $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ являются симметричными величинами. Выражая T^{ik} через R^{ik} согласно уравнениям Эйнштейна, получим соотношение

$$(-g) \left\{ \frac{c^4}{8\pi k} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right) + t^{ik} \right\} = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}, \quad (96,7)$$

из которого можно найти после довольно длинного вычисления следующее выражение для t^{ik} :

$$\begin{aligned} t^{ik} = & \frac{c^4}{16\pi k} \left\{ (2\Gamma_{lm}^n \Gamma_{np}^p - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mn}^p - \Gamma_{ln}^n \Gamma_{mp}^p) (g^{il} g^{km} - g^{ik} g^{lm}) + \right. \\ & + g^{il} g^{mn} (\Gamma_{lp}^k \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^k \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^k \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^k \Gamma_{np}^p) + \\ & + g^{kl} g^{mn} (\Gamma_{lp}^i \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^i \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^i \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^p) + \\ & \left. + g^{lm} g^{np} (\Gamma_{ln}^i \Gamma_{mp}^k - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^k) \right\}, \end{aligned} \quad (96,8)$$

или, непосредственно через производные от компонент метрического тензора:

$$\begin{aligned} (-g)t^{ik} = & \frac{c^4}{16\pi k} \{ g^{ik}_{,l} g^{lm}_{,m} - g^{il}_{,l} g^{km}_{,m} + \frac{1}{2} g^{ik} g_{lm} g^{ln}_{,p} g^{pm}_{,n} - \\ & - (g^{il} g_{mn} g^{kn}_{,p} g^{mp}_{,l} + g^{kl} g_{mn} g^{ln}_{,p} g^{mp}_{,l}) + g_{lm} g^{np} g^{il}_{,n} g^{km}_{,p} + \\ & + \frac{1}{8} (2g^{il} g^{km} - g^{ik} g^{lm}) (2g_{np} g_{qr} - g_{pq} g_{nr}) g^{nr}_{,l} g^{pq}_{,m} \}, \end{aligned} \quad (96,9)$$

где $g^{ik} = \sqrt{-g} g^{ik}$, а индекс « $,i$ » означает простое дифференцирование по x^i .

Существенным свойством величин t^{ik} является то, что они не составляют тензора; это видно уже из того, что в $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ стоят простые, а не ковариантные производные. Однако t^{ik} выражаются через величины Γ_{kl}^i , а последние ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям координат (см. § 85); то же самое относится, следовательно, и к t^{ik} .

Из определения (96,5) следует, что для суммы $T^{ik} + t^{ik}$ тождественно выполняются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (-g)(T^{ik} + t^{ik}) = 0. \quad (96,10)$$

Это значит, что имеет место закон сохранения величин

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g) (T^{ik} + t^{ik}) dS_k. \quad (96,11)$$

При отсутствии гравитационного поля в галилеевых координатах $t^{ik} = 0$, и написанный интеграл переходит в $\frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k$, т. е. в 4-импульс материи. Поэтому величины (96,11) должны быть отождествлены с полным 4-импульсом материи вместе с гравитационным полем. Совокупность величин t^{ik} называют *псевдотензором энергии-импульса* гравитационного поля.

Интегрирование в (96,11) может производиться по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство. Если выбрать в качестве ее гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то P^i можно написать в виде трехмерного пространственного интеграла:

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g) (T^{i0} + t^{i0}) dV. \quad (96,12)$$

Тот факт, что полный 4-импульс материи и поля выражается в виде интегралов от симметричных по индексам i, k величин $(-g) (T^{ik} + t^{ik})$, весьма существен. Он означает, что сохраняется 4-момент импульса, определяемый как (см. § 32)¹⁾

$$\begin{aligned} M^{ik} &= \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \\ &= \frac{1}{c} \int [x^i (T^{kl} + t^{kl}) - x^k (T^{il} + t^{il})] (-g) dS_l. \end{aligned} \quad (96,13)$$

Таким образом, и в общей теории относительности у замкнутой системы гравитирующих тел сохраняется полный момент импульса и, кроме того, по-прежнему может быть дано определение центра инерции, совершающего равномерное движение. Последнее связано с сохранением компонент $M^{0\alpha}$ (ср. § 14), выражающимся уравнением

$$x^0 \int (T^{a0} + t^{a0}) (-g) dV - \int x^a (T^{00} + t^{00}) (-g) dV = \text{const},$$

¹⁾ Необходимо отметить, что полученное нами выражение для 4-импульса материи и поля отнюдь не является единственным возможным. На-против, можно бесчисленными способами (см., например, задачу к этому параграфу) подобрать такие выражения, которые бы в отсутствие поля переходили в T^{ik} , а при интегрировании по dS_k давали бы сохраняющиеся величины. Однако сделанный нами выбор — единственный, при котором псевдотензор энергии-импульса поля содержит лишь первые (но не более высокие) производные от g_{ik} (условие, представляющееся вполне естественным с физической точки зрения) и при этом симметричен, так что дает возможность сформулировать закон сохранения момента,

так что координаты центра инерции даются формулой

$$X^a = \frac{\int x^a (T^{00} + t^{00}) (-g) dV}{\int (T^{00} + t^{00}) (-g) dV}. \quad (96,14)$$

Выбирая систему координат, инерциальную в данном элементе объема, можно обратить все t^{ik} в любой точке пространства-времени в нуль (так как при этом обращаются в нуль все Γ_{kl}^i). С другой стороны, можно получить отличные от нуля t^{ik} в плоском пространстве, т. е. при отсутствии гравитационного поля, если просто воспользоваться криволинейными координатами вместо декартовых. Таким образом, во всяком случае не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве. Если тензор $T_{ik} = 0$ в некоторой мировой точке, то это имеет место в любой системе отсчета, так что мы можем сказать, что в этой точке нет материи или электромагнитного поля. Напротив, из равенства нулю псевдотензора в некоторой точке в одной системе отсчета отнюдь не следует того же самого для другой системы отсчета, и поэтому не имеет смысла говорить о том, имеется ли или нет гравитационная энергия в данном месте. Это вполне соответствует тому, что подходящим выбором координат можно «уничтожить» гравитационное поле в данном элементе объема, причем согласно сказанному выше одновременно исчезает и псевдотензор t^{ik} в этом элементе.

Величины же P^i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений.

Выделим область пространства, включающую в себя все рассматриваемые массы. В четырехмерном пространстве-времени эта область с течением времени прорезывает «канал». Вне этого «канала» поле убывает, так что 4-пространство асимптотически приближается к плоскому. В связи с этим при вычислении энергии и импульса поля надо выбрать четырехмерную систему координат таким образом, чтобы по мере удаления от «канала» она переходила в галилееву систему и все t^{ik} исчезали.

Этим требованием система отсчета, конечно, отнюдь не определяется однозначно, — внутри канала она может быть выбрана произвольно. В полном согласии с физическим смыслом величин P^i они оказываются, однако, совершенно не зависящими от выбора системы координат внутри «канала». Действительно, рассмотрим две системы координат, различные внутри «канала», но переходящие вдали от него в одну и ту же галилееву систему, и сравним значения 4-импульса P^i и P'^i в этих двух системах в определенные моменты «времени» x^0 и x'^0 . Введем третью си-

систему координат, совпадающую внутри «канала» в момент x^0 с первой системой, в момент x'^0 — со второй, а вдали от «канала» — с той же галилеевой. В силу закона сохранения энергии и импульса величины P^i постоянны ($dP^i/dx^0 = 0$). Это имеет место в третьей системе координат, как и в первых двух. Отсюда следует $P^i = P'^i$, что и требовалось доказать.

Выше было отмечено, что величины t^{ik} являются тензором по отношению к линейным преобразованиям координат. Поэтому величины P^i образуют 4-вектор по отношению к таким преобразованиям, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца, переводящим на бесконечности одну галилееву систему отсчета в другую¹⁾.

4-импульс P^i может быть выражен также в виде интеграла по удаленной трехмерной поверхности, охватывающей «все пространство». Подставив (96,5) в (96,11), находим

$$P^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} dS_k.$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по обычной поверхности с помощью (6,17):

$$P^i = \frac{1}{2c} \oint h^{ikl} df_{kl}^*. \quad (96,15)$$

Если в качестве области интегрирования в (96,11) выбирается гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то в (96,15) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной поверхностью²⁾:

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{10a} df_a. \quad (96,16)$$

Заметим, что, как будет показано в § 105, величины h^{10a} убывают в стационарном случае на больших расстояниях от тел по закону $1/r^2$, так что интеграл (96,16) остается конечным при удалении поверхности интегрирования на бесконечность.

¹⁾ Строго говоря, при определении (96,11) P^i есть 4-вектор лишь по отношению к линейным преобразованиям с равным единице определятелем; сюда относятся и преобразования Лоренца, которые только и представляют физический интерес. Если допускать также и преобразования с не равным единице определятелем, то в определение P^i надо ввести значение g на бесконечности, написав в левой стороне (96,11) $\sqrt{-g_\infty} P^i$ вместо P^i .

²⁾ df_{ik}^* есть «нормальный» элемент поверхности, связанный с «тангенциальным» элементом df^{ik} посредством (6,11): $df_{ik}^* = \frac{1}{2} e_{iklm} df^{lm}$. На поверхности, охватывающей гиперповерхность, перпендикулярную к оси x^0 , отличны от нуля только компоненты df^{lm} с $l, m = 1, 2, 3$, и следовательно, df_{ik}^* имеет только компоненты с одним из i или k , равным нулю. Компоненты df_{0a}^* являются не чем иным, как компонентами трехмерного элемента обычной поверхности, который мы обозначаем просто посредством df_a .

Для вывода аналогичной формулы для момента импульса подставим (96,5) в (96,13) и представим h^{ikl} в виде (96,2). Принтегрировав затем «по частям», найдем:

$$\begin{aligned} M^{ik} = \frac{1}{c} \int \left(x^i \frac{\partial^2 \lambda^{klmn}}{\partial x^m \partial x^n} - x^k \frac{\partial^2 \lambda^{ilmn}}{\partial x^m \partial x^n} \right) dS_l = \\ = \frac{1}{2c} \oint \left(x^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - x^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) df_{lm} - \\ - \frac{1}{c} \int \left(\delta_m^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - \delta_m^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) dS_l = \frac{1}{2c} \oint \left(x^i h^{klm} - x^k h^{ilm} \right) df_{lm} - \\ - \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^n} (\lambda^{klm} - \lambda^{ilm}) dS_l. \end{aligned}$$

Из определения величин λ^{klm} легко видеть, что

$$\lambda^{ilk} - \lambda^{kl} = \lambda^{ilnk}.$$

Поэтому оставшийся интеграл по dS_l равен

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial \lambda^{ilnk}}{\partial x^n} dS_l = \frac{1}{2c} \oint \lambda^{ilnk} df_{ln}.$$

Наконец, снова выбирая чисто пространственную поверхность интегрирования, получим окончательно:

$$M^{ik} = \frac{1}{c} \oint (x^i h^{k0a} - x^k h^{i0a} + \lambda^{i0ak}) df_a. \quad (96,17)$$

Задача

Получить выражение для полного 4-импульса материи и гравитационного поля, воспользовавшись формулой (32,5).

Решение. В криволинейных координатах имеем вместо (32,1)

$$S = \int \Lambda \sqrt{-g} dV dt$$

и потому для получения сохраняющейся величины надо писать в (32,5) $\Lambda \sqrt{-g}$ вместо Λ , так что 4-импульс имеет вид

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left[-\Lambda \sqrt{-g} \delta_i^k + \sum \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial (\sqrt{-g} \Lambda)}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

При применении этой формулы к материи, для которой величины $q^{(l)}$ отличны от g_{ik} , можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, и подынтегральное выражение оказывается равным $\sqrt{-g} T_i^k$, где T_i^k — тензор энергии-импульса материи. При применении же написанной формулы к гравитационному полю надо положить $\Lambda = -\frac{c^4}{16\pi k} G$, а величинами $q^{(l)}$ яв-

ляются компоненты g_{ik} метрического тензора. Полный 4-импульс поля и материи равен, следовательно,

$$P_i = \frac{1}{c} \int T_i^k \sqrt{-g} dS_k + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left[G \sqrt{-g} \delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial (G \sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

Воспользовавшись выражением (93,3) для G , можно преобразовать эту формулу к виду

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \right. \\ \left. + \frac{c^4}{16\pi k} \left[G \sqrt{-g} \delta_i^k + \Gamma_{lm}^k \frac{\partial (g^{lm} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma_{ml}^l \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} \right] \right\} dS_k.$$

Второй член в фигурных скобках определяет 4-импульс гравитационного поля при отсутствии материи. Подынтегральное выражение не симметрично по индексам i, k и потому не дает возможности сформулировать закон сохранения момента импульса.

§ 97. Синхронная система отсчета

Как мы знаем из § 84, условие, допускающее синхронизацию хода часов в различных точках пространства, заключается в равенстве нулю компонент g_{0a} метрического тензора. Если, кроме того, $g_{00} = 1$, то временная координата $x^0 = t$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства¹⁾. Систему отсчета, удовлетворяющую условиям

$$g_{00} = 1, \quad g_{0a} = 0, \quad (97,1)$$

назовем *синхронной*. Элемент интервала в такой системе дается выражением

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ab} dx^a dx^b, \quad (97,2)$$

причем компоненты тензора пространственной метрики совпадают (с точностью до знака) с компонентами g_{ab} :

$$\gamma_{ab} = -g_{ab}. \quad (97,3)$$

В синхронной системе отсчета линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве. Действительно, 4-вектор $u^i = dx^i/ds$ касательной к мировой линии $x^1, x^2, x^3 = \text{const}$ имеет составляющие $u^a = 0, u^0 = 1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = \Gamma_{00}^i = 0,$$

поскольку при условиях (97,1) символы Кристоффеля $\Gamma_{00}^a, \Gamma_{00}^0$ равны нулю тождественно.

¹⁾ В этом параграфе полагаем $c = 1$.