

ляются компоненты g_{ik} метрического тензора. Полный 4-импульс поля и материи равен, следовательно,

$$P_i = \frac{1}{c} \int T_i^k \sqrt{-g} dS_k + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left[G \sqrt{-g} \delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial (G \sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

Воспользовавшись выражением (93,3) для G , можно преобразовать эту формулу к виду

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \right. \\ \left. + \frac{c^4}{16\pi k} \left[G \sqrt{-g} \delta_i^k + \Gamma_{lm}^k \frac{\partial (g^{lm} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma_{ml}^l \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} \right] \right\} dS_k.$$

Второй член в фигурных скобках определяет 4-импульс гравитационного поля при отсутствии материи. Подынтегральное выражение не симметрично по индексам i, k и потому не дает возможности сформулировать закон сохранения момента импульса.

§ 97. Синхронная система отсчета

Как мы знаем из § 84, условие, допускающее синхронизацию хода часов в различных точках пространства, заключается в равенстве нулю компонент g_{0a} метрического тензора. Если, кроме того, $g_{00} = 1$, то временная координата $x^0 = t$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства¹⁾. Систему отсчета, удовлетворяющую условиям

$$g_{00} = 1, \quad g_{0a} = 0, \quad (97,1)$$

назовем *синхронной*. Элемент интервала в такой системе дается выражением

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ab} dx^a dx^b, \quad (97,2)$$

причем компоненты тензора пространственной метрики совпадают (с точностью до знака) с компонентами g_{ab} :

$$\gamma_{ab} = -g_{ab}. \quad (97,3)$$

В синхронной системе отсчета линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве. Действительно, 4-вектор $u^i = dx^i/ds$ касательной к мировой линии $x^1, x^2, x^3 = \text{const}$ имеет составляющие $u^a = 0, u^0 = 1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = \Gamma_{00}^i = 0,$$

поскольку при условиях (97,1) символы Кристоффеля $\Gamma_{00}^a, \Gamma_{00}^0$ равны нулю тождественно.

¹⁾ В этом параграфе полагаем $c = 1$.

Легко также видеть, что эти линии нормальны к гиперповерхностям $t = \text{const}$. Действительно, 4-вектор нормали к такой гиперповерхности $n_i = \partial i / \partial x^i$ имеет ковариантные составляющие $n_a = 0$, $n^0 = 1$. Соответствующие контравариантные компоненты при условиях (97,1) тоже равны $n^a = 0$, $n^0 = 1$, т. е. совпадают с компонентами 4-вектора u^i касательных к линиям времени.

Обратно, этими свойствами можно воспользоваться для геометрического построения синхронной системы отсчета в любом пространстве-времени. Для этого выбираем в качестве исходной какую-либо пространственнонподобную гиперповерхность, т. е. гиперповерхность, нормаль к которой в каждой ее точке имеет временное направление (лежит внутри светового конуса с вершиной в этой же точке); все элементы интервала на такой гиперповерхности пространственнонподобны. Затем строим семейство нормальных к этой гиперповерхности геодезических линий. Если теперь выбрать эти линии в качестве координатных линий времени, причем определить времененную координату t как длину s геодезической линии, отсчитываемую от исходной гиперповерхности, мы получим синхронную систему отсчета.

Ясно, что такое построение, а тем самым и выбор синхронной системы отсчета в принципе возможны всегда. Более того, этот выбор еще и не однозначен. Метрика вида (97,2) допускает любые преобразования пространственных координат, не затрагивающие времени, и, кроме того, преобразование, соответствующее произволу в выборе исходной гиперповерхности в указанном геометрическом построении.

Аналитически преобразование к синхронной системе отсчета можно в принципе произвести при помощи уравнения Гамильтона — Якоби. Основание этого способа состоит в том, что траектории частицы в гравитационном поле как раз и являются геодезическими линиями.

Уравнение Гамильтона — Якоби для частицы (массу которой положим равной единице) в гравитационном поле есть

$$g^{ik} \frac{d\tau}{dx^i} \frac{d\tau}{dx^k} = 1 \quad (97,4)$$

(мы обозначили здесь действие посредством τ). Его полный интеграл имеет вид

$$\tau = f(\xi^a, x^i) + A(\xi^a), \quad (97,5)$$

где f — функция четырех координат x^i и трех параметров ξ^a ; четвертую постоянную A рассматриваем как произвольную функцию трех ξ^a . При таком представлении τ уравнения траектории частицы можно получить приравниванием производных $d\tau/d\xi^a$ нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^a} = - \frac{\partial A}{\partial \xi^a}. \quad (97,6)$$

Для каждого заданных значений параметров ξ^α правые стороны уравнений (97,6) имеют определенные постоянные значения и определяемая этими уравнениями мировая линия является одной из возможных траекторий частицы. Выбрав постоянные вдоль траекторий величины ξ^α в качестве новых пространственных координат, а величину t — в качестве новой временной координаты, мы и получим синхронную систему отсчета, причем уравнениями (97,5—6) определится искомое преобразование от старых координат к новым. Действительно, геодезичность линий времени при таком преобразовании обеспечивается автоматически, причем эти линии будут нормальны к гиперповерхностям $t = \text{const}$. Последнее очевидно из механической аналогии: 4-вектор нормали к гиперповерхности $-\partial\tau/\partial x^i$ совпадает в механике с 4-импульсом частицы и потому совпадает по направлению с ее 4-скоростью u^i , т. е. с 4-вектором касательной к траектории. Наконец, выполнение условия $g_{00} = 1$ очевидно из того, что производная $-d\tau/ds$ действия вдоль траектории есть масса частицы, которую мы приняли равной 1; поэтому $|d\tau/ds| = 1$.

Напишем уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета, отделив в них операции пространственных и временного дифференцирований.

Введем обозначение

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \quad (97,7)$$

для производных по времени от трехмерного метрического тензора; эти величины сами составляют трехмерный тензор. Все операции перемещения индексов у трехмерного тензора $\kappa_{\alpha\beta}$ и его ковариантные дифференцирования производятся в дальнейшем в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ ¹). Отметим, что сумма κ_α^α есть логарифмическая производная определителя $\gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g$:

$$\kappa_a^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \gamma. \quad (97,8)$$

Для символов Кристоффеля находим выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{00}^\alpha = \Gamma_{0\alpha}^0 = 0, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{1}{2} \kappa_\beta^\alpha, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \lambda_{\beta\gamma}^\alpha, \end{aligned} \quad (97,9)$$

где $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ — трехмерные символы Кристоффеля, образованные из тензора $\gamma_{\alpha\beta}$. Вычисление по формуле (92,7) приводит к

¹⁾ Но это не относится, конечно, к операциям перемещения индексов у пространственных компонент 4-тензоров R_{lk} , T_{lk} (ср. примечание на стр. 325). Так, T_a^b надо понимать по-прежнему как $g^{b\gamma} T_{\gamma a} + g^{b0} T_{0a}$, что сводится в данном случае к $g^{b\gamma} T_{\gamma a}$ и отличается знаком от $\gamma^{b\gamma} T_{\gamma a}$.

следующим выражениям для компонент R_{ik} :

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa_a^a - \frac{1}{4} \kappa_a^\beta \kappa_\beta^a, \quad R_{0a} = \frac{1}{2} (\kappa_a^\beta;_\beta - \kappa_\beta^\beta;_a), \\ R_{ab} &= P_{ab} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa_{ab} + \frac{1}{4} (\kappa_{ab} \kappa^v_v - 2 \kappa_a^v \kappa_{bv}). \end{aligned} \quad (97,10)$$

Здесь P_{ab} — трехмерный тензор Риччи, построенный из γ_{ab} так же, как R_{ik} строится из g_{ik} ; поднятие его индексов производится ниже тоже с помощью трехмерной метрики γ_{ab} .

Уравнения Эйнштейна напишем в смешанных компонентах:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa_a^a - \frac{1}{4} \kappa_a^\beta \kappa_\beta^a = 8\pi k \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right), \quad (97,11)$$

$$R_a^0 = \frac{1}{2} (\kappa_a^\beta;_\beta - \kappa_\beta^\beta;_a) = 8\pi k T_a^0, \quad (97,12)$$

$$R_a^\beta = -P_a^\beta - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \kappa_a^\beta) = 8\pi k \left(T_a^\beta - \frac{1}{2} \delta_a^\beta T \right). \quad (97,13)$$

Характерным свойством синхронных систем отсчета является их нестационарность: в такой системе гравитационное поле не может быть постоянным. Действительно, в постоянном поле было бы $\kappa_{ab} = 0$. Между тем при наличии материи обращение всех κ_{ab} в нуль во всяком случае противоречило бы уравнению (97,11) (с отличной от нуля правой частью). В пустом же пространстве мы нашли бы из (97,13), что все P_{ab} , а тем самым и все компоненты трехмерного тензора кривизны $P_{ab}\gamma^{ab}$ обращаются в нуль, т. е. поле вообще отсутствует (в синхронной системе при евклидовой пространственной метрике пространство-время плоское).

В то же время заполняющая пространство материя не может, вообще говоря, покояться относительно синхронной системы отсчета. Это очевидно из того, что частицы материи, в которой действуют силы давления, движутся, вообще говоря, не по геодезическим мировым линиям; мировая же линия покоящейся частицы есть линия времени и в синхронной системе является геодезической. Исключение представляет случай «пылевидной» материи ($p = 0$). Не взаимодействуя друг с другом, ее частицы движутся по геодезическим мировым линиям; в этом случае, следовательно, условие синхронности системы отсчета не противоречит условию ее *сопутствия* материи¹⁾. Для других уравнений состояния аналогичная ситуация может иметь место лишь в частных случаях, когда во всех или в некоторых направлениях отсутствует градиент давления.

¹⁾ Но и в этом случае для возможности выбора «синхронно-сопутствующей» системы отсчета необходимо еще, чтобы материя двигалась «без вращения». В сопутствующей системе контравариантные компоненты 4-скорости $u^0 = 1$, $u^a = 0$. Если система, отсчета также и синхронна, то и ковариант-

Из уравнения (97,11) можно показать, что определитель $-g = \gamma$ метрического тензора в синхронной системе отсчета непременно должен обратиться в нуль в течение конечного времени.

Для этого заметим, что выражение в правой стороне этого уравнения при любом распределении материи положительно. Действительно, в синхронной системе отсчета для тензора энергии-импульса (94,9) имеем:

$$T_0^0 - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} (\epsilon + 3p) + \frac{(p + \epsilon) v^2}{1 - v^2}$$

(компоненты 4-скорости — из (88,14)); положительность этой величины очевидна. То же самое справедливо и для тензора энергии-импульса электромагнитного поля ($T = 0$, T_0^0 — положительная плотность энергии поля). Таким образом, имеем из (97,11):

$$-R_0^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa_a^a + \frac{1}{4} \kappa_a^b \kappa_b^a \leqslant 0 \quad (97,14)$$

(знак равенства достигается в пустом пространстве).

В силу алгебраического неравенства¹⁾

$$\kappa_b^a \kappa_a^b \geqslant \frac{1}{3} (\kappa_a^a)^2$$

можно переписать (97,14) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \kappa_a^a + \frac{1}{6} (\kappa_a^a)^2 \leqslant 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\kappa_a^a} \geqslant \frac{1}{6}. \quad (97,15)$$

Пусть, например, в некоторый момент времени $\kappa_a^a > 0$. Тогда при уменьшении t величина $1/\kappa_a^a$ убывает, имея всегда конечную (не равную нулю) производную, и потому должна обратиться в нуль (с положительной стороны) в течение конечного времени. Другими словами, κ_a^a обращается в $+\infty$, а поскольку $\kappa_a^a = \partial \ln \gamma / \partial t$, то это значит, что определитель γ обращается в нуль (причем, согласно неравенству (97,15), не быстрее чем t^6). Если

ные компоненты $u_0 = 1$, $u_a = 0$, а потому ее 4-ротор

$$u_{l;k} - u_{k;l} \equiv \frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^l} = 0.$$

Но это тензорное равенство должно быть тогда справедливым и в любой другой системе отсчета. Так, в синхронной, но не сопутствующей системе получим отсюда условие $\text{rot } v = 0$ для трехмерной скорости v .

¹⁾ В его справедливости легко убедиться, приведя тензор κ_a^b (в любой заданный момент времени) к диагональному виду.

же в начальный момент $\dot{x}_a^a < 0$, то же самое получится для возрастающего времени.

Этот результат, однако, отнюдь не доказывает неизбежности существования истинной, физической особенности в метрике. Физической особенностью является лишь такая, которая свойственна пространству-времени как таковому и не связана с характером выбранной системы отсчета (такая особенность должна характеризоваться обращением в бесконечность скалярных величин — плотности материи, инвариантов тензора кривизны). Особенность же в синхронной системе отсчета, неизбежность которой мы доказали, в общем случае в действительности является фиктивной, исчезающей при переходе к другой (не синхронной) системе отсчета. Ее происхождение ясно из простых геометрических соображений.

Мы видели выше, что построение синхронной системы сводится к построению семейства геодезических линий, ортогональных к какой-либо пространственноподобной гиперповерхности. Но геодезические линии произвольного семейства, вообще говоря, пересекаются друг с другом на некоторых огибающих гиперповерхностях — четырехмерных аналогах каустических поверхностей геометрической оптики. Пересечение же координатных линий дает, разумеется, особенность в метрике в данной координатной системе. Таким образом, имеется геометрическая причина для появления особенности, связанной со специфическими свойствами синхронной системы и потому не имеющей физического характера. Произвольная метрика 4-пространства допускает, вообще говоря, существование также и непересекающихся семейств времениподобных геодезических линий. Неизбежность же обращения в нуль определителя γ в синхронной системе означает, что допускаемые уравнениями поля свойства кривизны реального (не плоского) пространства-времени (выражаемые неравенством $R_0^0 \geq 0$) исключают возможность существования таких семейств, так что линии времени во всякой синхронной системе отсчета непременно пересекаются друг с другом¹⁾.

¹⁾ Аналитическое построение метрики вблизи фиктивной особенности в синхронной системе отсчета см. Е. М. Лишиц, В. В. Судаков, И. М. Хаматников, ЖЭТФ 40, 1947 (1961). Общий характер этой метрики ясен из геометрических соображений. Поскольку каустическая гиперповерхность во всяком случае заключает в себе времениподобные интервалы (элементы длины геодезических линий времени в точках их касания с каустикой), она не является пространственноподобной. Далее, на каустике обращается в нуль одно из главных значений метрического тензора γ_{ab} соответственно тому, что обращается в нуль расстояние (δ) между двумя соседними геодезическими, пересекающимися друг с другом в точке их касания с каустикой. Обращение δ в нуль происходит пропорционально первой степени расстояния (l) до точки пересечения. Поэтому главное значение метрического тензора, а с ним и определитель γ обращаются в нуль как l^2 .

Мы упоминали выше о том, что для пылевидной материи синхронная система отсчета может быть в то же время и сопутствующей. В таком случае плотность материи обратится на каустике в бесконечность, — просто как результат пересечения мировых траекторий частиц, совпадающих с линиями времени. Ясно, однако, что эта особенность плотности устраниется уже введением сколь угодно малого, но отличного от нуля давления материи и в этом смысле тоже не имеет физического характера.

Задачи

1. Найти вид разложения решения уравнений гравитационного поля в простоте вблизи не особой, регулярной точки по времени.

Решение. Выбрав условно рассматриваемую временную точку в качестве начала отсчета времени, будем искать $\gamma_{\alpha\beta}$ в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + tb_{\alpha\beta} + t^2c_{\alpha\beta} + \dots, \quad (1)$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ — функции пространственных координат. В том же приближении обратный тензор:

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - tb^{\alpha\beta} + t^2(b^\alpha b^\beta_\gamma - c^{\alpha\beta}),$$

где $a^{\alpha\beta}$ — тензор, обратный $a_{\alpha\beta}$, а поднятие индексов у остальных тензоров производится с помощью $a^{\alpha\beta}$. Далее имеем:

$$\kappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + 2tc_{\alpha\beta}, \quad \kappa_a^\beta = b_a^\beta + t(2c_a^\beta - b_{a\gamma}b^{\beta\gamma}).$$

Уравнения Эйнштейна (97,11—13) приводят к следующим соотношениям:

$$R_0^0 = -c + \frac{1}{4}b_a^\beta b_\beta^\alpha = 0, \quad (2)$$

$$R_a^0 = \frac{1}{2}(b_a^\beta;_\beta - b;_a) + t\left[-c;_a + \frac{3}{8}(b_\beta^\gamma b_\gamma^\beta);_a + c_a^\beta;_\beta + \frac{1}{4}b_a^\beta b;_\beta - \frac{1}{2}(b_a^\gamma b_\gamma^\beta);_\beta\right] = 0, \quad (3)$$

$$R_a^\beta = -P_a^\beta - \frac{1}{4}b_a^\beta b + \frac{1}{2}b_a^\gamma b_\gamma^\beta - c_a^\beta = 0 \quad (4)$$

($b = b_a^\alpha$, $c = c_a^\alpha$). Здесь операции ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $a_{\alpha\beta}$; по этой же метрике определяется тензор $P_{\alpha\beta}$.

Из (4) коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ полностью определяются по коэффициентам $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$. После этого (2) дает соотношение

$$P + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}b_a^\beta b_\beta^\alpha = 0. \quad (5)$$

Из членов нулевого порядка в (3) имеем:

$$b_{a;\beta}^\beta = b;_a. \quad (6)$$

Члены же $\sim t$ в этом уравнении при использовании (2; 4—6) (и тождества $P_{\alpha;\beta}^\beta = \frac{1}{2}P;_\alpha$;ср. (92,10)) обращаются в нуль тождественно.

Таким образом, 12 величин $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ связаны друг с другом одним соотношением (5) и тремя соотношениями (6), так что остается восемь произвольных функций трех пространственных координат. Из них три связаны с возможностью произвольных преобразований трех пространственных координат и одна — с произволом в выборе исходной гиперповерхности при построении синхронной системы отсчета. Остается, как и следовало (см. конец § 95), четыре «физически различные» произвольные функции.

2. Вычислить компоненты тензора кривизны R_{iklm} в синхронной системе отсчета.

Решение. При помощи символа Кристоффеля (97,9) получим по формуле (92,1):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}(\kappa_{\alpha\delta}\kappa_{\beta\gamma} - \kappa_{\alpha\gamma}\kappa_{\beta\delta}),$$

$$R_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha\gamma;\beta} - \kappa_{\alpha\beta;\gamma}),$$

$$R_{0\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \kappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \kappa_{\alpha\gamma}\kappa_{\beta}^{\gamma},$$

где $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — трехмерный тензор кривизны, соответствующий трехмерной пространственной метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

3. Найти общий вид бесконечно малого преобразования, не нарушающего синхронности системы отсчета.

Решение. Преобразование имеет вид

$$t \rightarrow t + \varphi(x^1, x^2, x^3), \quad x^a \rightarrow x^a + \xi^a(x^1, x^2, x^3, t),$$

где φ , ξ^a — малые величины. Соблюдение условия $g_{00}=1$ обеспечивается независимостью φ от t , а для соблюдения условия $g_{0a}=0$ должны выполняться уравнения

$$\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^a},$$

откуда

$$\xi^a = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\beta}} \int \gamma^{\alpha\beta} dt + f^a(x^1, x^2, x^3), \quad (1)$$

где f^a — снова малые величины (образующие трехмерный вектор f). При этом пространственный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ заменяется согласно

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \gamma_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} - \varphi \kappa_{\alpha\beta} \quad (2)$$

(в чём легко убедиться с помощью формулы (94,3)).

Преобразование содержит, как и следовало, четыре произвольные (малые) функции пространственных координат φ , f^a .

§ 98. Тетрадное представление уравнений Эйнштейна

Определение компонент тензора Риччи (и тем самым составление уравнений Эйнштейна) для метрики того или иного специального вида связано, вообще говоря, с довольно громоздкими вычислениями. Поэтому приобретают значение различные формулы, позволяющие в некоторых случаях упростить эти вычисления и представить результат в более обозримом виде. К числу