Таким образом, 12 величин $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ связаны друг с другом одним соотношением (5) и тремя соотношениями (6), так что остается восемь произвольных функций трех пространственных координат. Из них три связаны с возможностью произвольных преобразований трех пространственных координат и одна — с произволом в выборе исходной гиперповерхности при построении синхронной системы отсчета. Остается, как и следовало (см. конец § 95), четыре «физически различные» произвольные функции.

2. Вычислить компоненты тензора кривизны R_{iklm} в синхронной системе отсчета.

Решение. При помощи символа Кристоффеля (97,9) получим по формуле (92,1):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}(\varkappa_{\alpha\delta}\varkappa_{\beta\gamma} - \varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa_{\beta\delta}),$$

$$R_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\varkappa_{\alpha\gamma;\beta} - \varkappa_{\alpha\beta;\gamma}),$$

$$R_{0\alpha0\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa^{\gamma}_{\beta},$$

где $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — трехмерный тензор кривизны, соответствующий трехмерной пространственной метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

3. Найти общий вид бесконечно малого преобразования, не нарушающего синхронности системы отсчета.

Решение. Преобразование имеет вид

$$t \to t + \varphi(x^1, x^2, x^3), \qquad x^\alpha \to x^\alpha + \xi^\alpha(x^1, x^2, x^3, t),$$

где φ, ξ^α — малые величины. Соблюдение условия $g_{00} = 1$ обеспечивается независимостью φ от t, а для соблюдения условия $g_{0\alpha} = 0$ должны выполняться уравнения

$$\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},$$

откуда

$$\xi^\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\int\gamma^{\alpha\beta}\,dt + f^\alpha(x^1, x^2, x^3), \tag{1}$$

где f^α — снова малые величины (образующие трехмерный вектор $\mathbf{f}$). При этом пространственный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ заменяется согласно

$$\gamma_{\alpha\beta} \to \gamma_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} - \varphi\varkappa_{\alpha\beta} \tag{2}$$

(в чем легко убедиться с помощью формулы (94,3)).

Преобразование содержит, как и следовало, четыре произвольные (малые) функции пространственных координат φ, f^α.

§ 98. Тетрадное представление уравнений Эйнштейна

Определение компонент тензора Риччи (и тем самым составление уравнений Эйнштейна) для метрики того или иного специального вида связано, вообще говоря, с довольно громоздкими вычислениями. Поэтому приобретают значение различные формулы, позволяющие в некоторых случаях упростить эти вычисления и представить результат в более обозримом виде. К числу

таких формул относится выражение тензора кривизны в так называемом *тетрадном* виде.

Введем совокупность четырех линейно-независимых *реперных* 4-векторов $e^{i}_{(a)}$ (нумеруемых индексом a), подчиненных лишь требованию

$$e^{i}_{(a)}e_{(b)\,i} = \eta_{ab}, \tag{98,1}$$

где η_{ab} — заданная постоянная симметричная матрица с сигнатурой $+---$; матрицу, обратную матрице η_{ab}, обозначим посредством η^{ab} $(\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^{a}_{b})$[1]. Наряду с четверкой (*тетрадой*) векторов $e^{i}_{(a)}$, введем также четверку *взаимных* с ними векторов $e^{(a)\,i}$ (нумеруемых верхними реперными индексами), определенных условиями

$$e^{(a)}_{i}e^{i}_{(b)} = \delta^{a}_{b}, \tag{98,2}$$

т. е. каждый из векторов $e^{(a)}_{i}$ ортогонален трем векторам $e^{i}_{(b)}$ с $b \neq a$. Умножив равенство (98,2) на $e^{k}_{(a)}$, получим $(e^{k}_{(a)}e^{(a)}_{i})\,e^{i}_{(b)} = e^{k}_{(b)}$, откуда видно, что наряду с (98,2) автоматически выполняются также и равенства

$$e^{(a)}_{i}e^{k}_{(a)} = \delta^{k}_{i}. \tag{98,3}$$

Умножив равенство $e^{i}_{(a)}e_{(c)\,i} = \eta_{ac}$ с обеих сторон на η^{bc}, получим:

$$e^{i}_{(a)}\left(\eta^{bc}e_{(c)\,i}\right) = \delta^{b}_{a};$$

сравнив с (98,2), находим, что

$$e^{(b)}_{i} = \eta^{bc}e_{(c)\,i}, \quad e_{(b)\,i} = \eta_{bc}e^{(c)}_{i}. \tag{98,4}$$

Таким образом, поднимание и опускание реперных индексов осуществляется матрицами η^{bc} и η_{bc}.

Значение введенных таким образом реперных векторов состоит в том, что через них может быть выражен метрический тензор. Действительно, согласно определению связи между ко- и контравариантными компонентами 4-вектора имеем $e^{(a)}_{i} = g_{il}e^{(a)\,l}$; умножив это равенство на $e_{(a)\,k}$ и использовав (98,3)

[1]) В этом параграфе первыми буквами латинского алфавита a, b, c, ... будут обозначаться индексы, нумерующие реперные векторы; 4-тензорные индексы обозначаются по-прежнему буквами i, k, l, ... В литературе реперные индексы принято обозначать буквами (или цифрами) в скобках. Во избежание чрезмерного утяжеления записи формул мы будем, однако, писать скобки лишь там, где реперные индексы фигурируют вместе (или наравне) с 4-тензорными, и будем опускать их в обозначении величин, которые по своему определению имеют лишь реперные индексы (например, η_{ab} и ниже γ_{abc}, λ_{abc}). По дважды повторяющимся реперным (как и тензорным) индексам везде подразумевается суммирование.

и (98,4), найдем:

$$g_{ik} = e_{(a)\,i} e_k^{(a)} = \eta_{ab} e_i^{(a)} e_k^{(b)}. \tag{98,5}$$

Квадрат элемента интервала с метрическим тензором (98,5) принимает вид

$$ds^2 = \eta_{ab} \left(e_i^{(a)} dx^i\right) \left(e_k^{(b)} dx^k\right). \tag{98,6}$$

Что касается произвольно задаваемой матрицы η_{ab}, то наиболее естественный ее выбор — в «галилеевой» форме (т. е. диагональная матрица с элементами 1, —1, —1, —1); при этом реперные векторы, согласно (98,1), взаимно ортогональны, причем один из них времениподобен, а три других — пространственноподобны [1]). Подчеркнем, однако, что такой выбор отнюдь не обязателен и возможны ситуации, когда по тем или иным причинам (например, по свойствам симметрии метрики) целесообразен выбор неортогональной тетрады [2]).

Тетрадные компоненты 4-вектора A^i (и аналогично для 4-тензоров любого ранга) определяются как его «проекции» на реперные 4-векторы:

$$A_{(a)} = e_{(a)}^i A_i, \quad A^{(a)} = e_i^{(a)} A^i = \eta^{ab} A_{(b)}. \tag{98,7}$$

Обратно:

$$A_i = e_i^{(a)} A_{(a)}, \quad A^i = e_{(a)}^i A^{(a)}. \tag{98,8}$$

Таким же образом определим операцию дифференцирования «вдоль направления a»:

$$\varphi_{,(a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

Введем нужные для дальнейшего величины [3])

$$\gamma_{acb} = e_{(a)\,i;k} e_{(b)}^i e_{(c)}^k \tag{98,9}$$

и их линейные комбинации

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = \\ = \left(e_{(a)\,i;k} - e_{(a)\,k;i}\right) e_{(b)}^i e_{(c)}^k = \left(e_{(a)\,i,k} - e_{(a)\,k,i}\right) e_{(b)}^i e_{(c)}^k. \tag{98,10}$$

---

[1]) Выбрав линейные формы $dx^{(a)} = e_i^{(a)} dx^i$ в качестве отрезков координатных осей в данном элементе 4-пространства (и взяв «галилеевы» η_{ab}), мы тем самым приведем метрику в этом элементе к галилееву виду. Подчеркнем лишний раз, что формы $dx^{(a)}$ не являются, вообще говоря, полными дифференциалами каких-либо функций координат.

[2]) Целесообразный выбор тетрады может диктоваться уже предварительным приведением ds^2 к виду (98,6). Так, выражению ds^2 в виде (88,13) отвечают реперные векторы

$$e_i^{(0)} = (\sqrt{h}, -\sqrt{h}\,\mathbf{g}), \quad e_i^{(a)} = (0, \mathbf{e}^{(a)}),$$

причем выбор $\mathbf{e}^{(a)}$ зависит от пространственной формы dl^2.

[3]) Величины γ_{abc} называют *коэффициентами вращения Риччи*.

Последнее равенство в (98,10) следует из (86,12); отметим, что величины λ_{abc} вычисляются простым дифференцированием реперных векторов.

Обратное выражение γ_{abc} через λ_{abc}:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}). \tag{98,11}$$

Эти величины обладают свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} \gamma_{abc} &= -\gamma_{bac}, \\ \lambda_{abc} &= -\lambda_{acb}. \end{aligned} \tag{98,12}$$

Наша цель состоит в определении тетрадных компонент тензора кривизны. Для этого надо исходить из определения (91,6), примененного к ковариантным производным реперных векторов:

$$e_{(a)\,i;\,k;\,l} - e_{(a)\,i;\,l;\,k} = e^m_{(a)} R_{mikl}$$

или

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = (e_{(a)\,i;\,k;\,l} - e_{(a)\,i;\,l;\,k})\, e^i_{(b)} e^k_{(c)} e^l_{(d)}.$$

Это выражение легко выразить через величины γ_{abc}. Пишем

$$e_{(a)\,i;\,k} = \gamma_{abc} e^{(b)}_i e^{(c)}_k,$$

а после следующего ковариантного дифференцирования производные от реперных векторов снова выражаются таким же образом; при этом ковариантная производная от скалярной величины γ_{abc} совпадает с ее простой производной [1]). В результате получается:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{a\,c,\,d} - \gamma_{abd,\,c} + \gamma_{abf}(\gamma^f{}_{cd} - \gamma^f{}_{dc}) + \gamma_{afc}\gamma^f{}_{bd} - \gamma_{afd}\gamma^f{}_{bc}, \tag{98,13}$$

где в соответствии с общим правилом $\gamma^a{}_{bc} = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$ и т. п.

Упрощение этого тензора по паре индексов a, c дает искомые тетрадные компоненты тензора Риччи; приведем их выраженными

---

[1]) Приведем для справок преобразованные аналогичным образом выражения для ковариантных производных произвольных 4-векторов и 4-тензоров:

$$A_{i;\,k} e^i_{(a)} e^k_{(b)} = A_{(a),\,(b)} + A^{(d)} \gamma_{dab},$$

$$A_{ik;\,l} e^i_{(a)} e^k_{(b)} e^l_{(c)} = A_{(a),\,(b),\,(c)} + A^{(d)}{}_{(b)} \gamma_{dac} + A_{(a)}{}^{(d)} \gamma_{dbc},$$

и т. п.

уже через величины λ_{abc}:

$$R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2}\Big(\lambda_{ab}{}^{c}{}_{,c} + \lambda_{ba}{}^{c}{}_{,c} + \lambda^{c}{}_{ca,b} + \lambda^{c}{}_{cb,a} +$$

$$+ \lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{cda} + \lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{dca} - \frac{1}{2}\lambda_{b}{}^{cd}\lambda_{acd} + \lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ab}{}^{d} + \lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ba}{}^{d}\Big). \qquad (98,14)$$

Наконец, обратим внимание на то, что изложенные построения по существу никак не связаны с четырехмерностью метрики. Поэтому полученные результаты могут быть применены и к вычислению трехмерных тензоров Римана и Риччи по трехмерной метрике. При этом, естественно, вместо тетрады реперных 4-векторов мы будем иметь дело с триадой трехмерных векторов, а матрица η_{ab} должна иметь сигнатуру $+++$ (мы встретимся с таким применением в § 116).