

Задача

Определить равновесную форму равномерно вращающейся как целое однородной гравитирующей массы жидкости.

Решение. Условие равновесия заключается в условии постоянства вдоль поверхности тела суммы гравитационного потенциала и потенциала центробежных сил:

$$\varphi - \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const}$$

(Ω — угловая скорость вращения; ось вращения — ось z). Искомая форма представляет собой сплюснутый эллипсоид вращения. Для определения его параметров подставляем (99,13) в условие равновесия и исключаем z^2 с помощью уравнения (99,10); это дает:

$$(x^2 + y^2) \left[\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^2 \sqrt{c^2 + s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu ka^2 c} - \right. \\ \left. - \frac{c^2}{a^2} \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)(c^2 + s)^{3/2}} \right] = \text{const},$$

откуда следует, что выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль. Произведя интегрирование, получим в результате уравнение:

$$\frac{(a^2 + 2c^2)}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \arccos \frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2 - c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k} = \frac{25}{6} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{M^2 \mu^{1/3}}{m^{10/3} k} \left(\frac{c}{a} \right)^{4/3}$$

($M = \frac{2}{5} ma^2 \Omega$ — момент импульса тела относительно оси z), определяющее отношение полуосей c/a по заданному Ω или M . Зависимость отношения c/a от M — однозначная; c/a монотонно убывает с увеличением M .

Оказывается, однако, что найденная симметричная форма устойчива (по отношению к малым возмущениям) лишь при не слишком больших значениях M . Именно, она теряет устойчивость при $M = 0,24k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (причем $c/a = 0,58$). При дальнейшем увеличении M равновесной становится форма трехосного эллипсоида с постепенно убывающими (соответственно от 1 и от 0,58) значениями b/a и c/a . Эта форма в свою очередь становится неустойчивой при $M = 0,31k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (причем $a:b:c = 1:0,43:0,34$)¹⁾.

§ 100. Центрально-симметричное гравитационное поле

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться любым центрально-симметричным распределением вещества; при этом, конечно, центрально-симметричным должно быть не только распределение, но и движение вещества, т. е. скорость в каждой точке должна быть направлена по радиусу.

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространства-времени, т. е. выражение для интервала ds , должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом

¹⁾ Указания по литературе, посвященной этим вопросам, можно найти в книге: Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, гл. XII.

расстоянии от центра. В евклидовом пространстве это расстояние равно радиус-вектору; в неевклидовом же пространстве, каким оно является при наличии гравитационного поля, нет величины, которая обладала бы всеми свойствами евклидова радиус-вектора (одновременно равного расстоянию до центра и деленной на 2π длине окружности). Поэтому выбор «радиус-вектора» теперь произволен.

Если пользоваться «сферическими» пространственными координатами r, θ, φ , то наиболее общим центрально-симметричным выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r, t) dr^2 + k(r, t) (\sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + \\ + l(r, t) dt^2 + a(r, t) dr dt, \quad (100,1)$$

где a, h, k, l — некоторые функции от «радиус-вектора» r и «времени» t . Но, ввиду произвольности в выборе системы отсчета в общей теории относительности, мы можем еще подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds^2 ; это значит, что мы можем преобразовать координаты r и t посредством формул

$$r = f_1(r', t'), \quad t = f_2(r', t'),$$

где f_1, f_2 — любые функции от новых координат r', t' .

Воспользовавшись этой возможностью, выберем координату r и время t таким образом, чтобы, во-первых, коэффициент $a(r, t)$ при $dr dt$ в выражении для ds^2 обратился в нуль и, во-вторых, коэффициент $k(r, t)$ был равен просто $-r^2$ ¹⁾). Последнее означает, что радиус-вектор r определен таким образом, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$ (элемент дуги окружности в плоскости $\theta = \pi/2$ равен $dl = rd\varphi$). Величины h и l нам будет удобно писать в экспоненциальном виде, соответственно как $-e^\lambda$ и $c^2 e^\nu$, где λ и ν — некоторые функции от r и t . Таким образом, получим для ds^2 следующее выражение:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) - e^\lambda dr^2. \quad (100,2)$$

Подразумевая под x^0, x^1, x^2, x^3 соответственно ct, r, θ, φ , мы имеем, следовательно, для отличных от нуля компонент метрического тензора выражения

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta.$$

Очевидно, что

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta.$$

¹⁾ Эти условия не определяют еще выбора временной координаты однозначным образом; она может еще быть подвергнута любому преобразованию вида $t = f(t')$, не содержащему r .

С помощью этих значений легко вычислить по формуле (86,3) величины Γ_{kl}^i . Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по r , а точка над буквой — дифференцирование по ct):

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{v'}{2}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-v}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{v'}{2} e^{v-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta, \quad \Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{v}}{2}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}.\end{aligned}\tag{100,3}$$

Все остальные компоненты Γ_{kl}^i (кроме тех, которые отличаются от написанных перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Для составления уравнений надо вычислить по формуле (92,7) компоненты тензора R_k^i . Простые вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2},\tag{100,4}$$

$$\begin{aligned}\frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 &= \frac{8\pi k}{c^4} T_3^3 = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{v' - \lambda'}{r} - \frac{v'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-v} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2} \right).\end{aligned}\tag{100,5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2},\tag{100,6}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}\tag{100,7}$$

(остальные компоненты уравнения (95,6) тождественно обращаются в нуль). Компоненты тензора энергии-импульса могут быть выражены с помощью формулы (94,9) через плотность энергии материи ϵ , ее давление p и радиальную скорость v .

Уравнения (100,4—7) могут быть проинтегрированы до конца в очень важном случае центрально-симметричного поля в пустоте, т. е. вне создающих его масс. Полагая тензор энергии-импульса равным нулю, получим следующие уравнения:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0,\tag{100,8}$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0,\tag{100,9}$$

$$\dot{\lambda} = 0\tag{100,10}$$

(четвертое уравнение, т. е. уравнение (100,5), можно не выписывать, так как оно является следствием трех остальных уравнений).

Из (100,10) мы видим, что λ не зависит от времени. Далее, складывая уравнения (100,8—9), находим $\lambda' + v' = 0$, т. е.

$$\lambda + v = f(t), \quad (100,11)$$

где $f(t)$ — функция только от времени. Но, выбрав интервал ds^2 в виде (100,2), мы оставили за собой еще возможность произвольного преобразования времени вида $t = f(t')$. Такое преобразование эквивалентно прибавлению к v произвольной функции времени, и с его помощью можно всегда обратить $f(t)$ в (100,11) в нуль. Итак, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda + v = 0$. Отметим, что центрально-симметричное гравитационное поле в пустоте автоматически оказывается статическим.

Уравнение (100,9) легко интегрируется и дает:

$$e^{-\lambda} = e^v = 1 + \frac{\text{const}}{r}. \quad (100,12)$$

Как и следовало, на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) $e^{-\lambda} = e^v = 1$, т. е. вдали от гравитирующих тел, метрика автоматически оказывается галилеевой. Постоянную const легко выразить через массу тела, потребовав, чтобы на больших расстояниях, где поле слабо, имел место закон Ньютона¹). Именно, должно быть $g_{00} = -1 + 2\phi/c^2$, где потенциал ϕ равен своему ньютоновскому выражению (99,4): $\phi = -km/r$ (m — полная масса создающего поле тела). Отсюда видно, что $\text{const} = -2km/c^2$. Эта величина имеет размерность длины; ее называют *гравитационным радиусом* тела r_g :

$$r_g = \frac{2km}{c^2}. \quad (100,13)$$

Таким образом, окончательно находим пространственно-временную метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (100,14)$$

Это решение уравнений Эйнштейна было найдено Шварцшильдом (K. Schwarzschild, 1916). Им полностью определяется гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметричным распределением масс. Подчеркнем, что это реше-

¹⁾ Для поля внутри сферической полости в центрально-симметричном распределении вещества должно быть $\text{const} = 0$, так как в противном случае метрика имела бы особенность при $r = 0$. Таким образом, метрика внутри такой полости автоматически оказывается галилеевой, т. е. гравитационное поле в полости отсутствует (как и в ньютоновской теории).

ние справедливо не только для покоящихся, но и для движущихся масс, если только движение тоже обладает должной симметрией (скажем, центрально-симметричные пульсации). Отметим, что метрика (100,14) зависит только от полной массы гравитирующего тела, как и в аналогичной задаче ньютоновской теории.

Пространственная метрика определяется выражением для элемента пространственного расстояния:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (100,15)$$

Геометрический смысл координаты r определяется тем, что в метрике (100,15) длина окружности с центром в центре поля равна $2\pi r$. Расстояние же между двумя точками r_1 и r_2 на одном и том же радиусе дается интегралом

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \quad (100,16)$$

Далее мы видим, что $g_{00} \leqslant 1$. В связи с формулой (84,1) $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dt$, определяющей истинное время, отсюда следует, что

$$d\tau \leqslant dt. \quad (100,17)$$

Знак равенства имеет место на бесконечности, где t совпадает с истинным временем. Таким образом, на конечных расстояниях от масс происходит «замедление» времени по сравнению со временем на бесконечности.

Наконец, приведем приближенное выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r} (dr^2 + c^2 dt^2). \quad (100,18)$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевой метрике ds_0^2 . На больших расстояниях от создающих поле масс всякое поле центрально-симметрично. Поэтому (100,18) определяет метрику на больших расстояниях от любой системы тел.

Некоторые общие соображения можно высказать и по поводу центрально-симметричного гравитационного поля внутри гравитирующих масс. Из уравнения (100,6) видно, что при $r \rightarrow 0$ λ должно тоже обращаться в нуль, по крайней мере как r^2 ; в противном случае правая часть уравнения обратилась бы при $L \rightarrow 0$ в бесконечность, т. е. T_0^0 имело бы в $r = 0$ особую точку.

Интегрируя формально уравнение (100,6) с граничным условием $\lambda|_{r=0} = 0$, получим:

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr \right). \quad (100,19)$$

Поскольку в силу (94,10) $T_0^0 = e^{-v} T_{00} \geq 0$, то отсюда видно, что $\lambda \geq 0$, т. е.

$$e^\lambda \geq 1. \quad (100,20)$$

Далее, вычитая уравнение (100,6) почленно из уравнения (100,4), получим:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r} (v' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4} (T_0^0 - T_1^1) = \frac{(e + p) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geq 0,$$

т. е. $v' + \lambda' \geq 0$. Но при $r \rightarrow \infty$ (вдали от масс) метрика переходит в галилееву, т. е. $v \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому из $v' + \lambda' \geq 0$ следует, что во всем пространстве

$$v + \lambda \leq 0. \quad (100,21)$$

Поскольку $\lambda \geq 0$, то отсюда следует, что $v \leq 0$, т. е.

$$e^v \leq 1. \quad (100,22)$$

Полученные неравенства показывают, что указанные выше свойства (100,16—17) пространственной метрики и хода часов в центрально-симметричном поле в пустоте относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Если гравитационное поле создается сферическим телом «радиуса» a , то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ формула (100,19) поэтому дает:

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^a T_0^0 r^2 dr \right).$$

С другой стороны, здесь можно применить относящееся к пустоте выражение (100,14), согласно которому

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{2km}{c^2 r} \right).$$

Сравнивая оба выражения, найдем формулу

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr, \quad (100,23)$$

определенную полную массу тела по его тензору энергии-импульса. В частности, для статического распределения вещества в теле имеем $T_0^0 = \epsilon$, так что

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a \epsilon r^2 dr. \quad (100,24)$$

Обратим внимание на то, что интегрирование производится по $4\pi r^2 dr$, между тем как элемент пространственного объема в метрике (100,2) есть $dV = 4\pi r^2 e^{\lambda/2} dr$, причем, согласно (100,20), $e^{\lambda/2} > 1$. Это различие выражает собой гравитационный дефект массы тела.

Задачи

1. Найти инварианты тензора кривизны для метрики Шварцшильда (100,14).

Решение. Вычисление по (92,1) с Γ_{kl}^i из (100,3) (или по формулам, полученным в задаче 2 § 92) приводит к следующим значениям отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{0101} = \frac{r_g}{r^3}, \quad R_{0202} = \frac{R_{0303}}{\sin^2 \theta} = -\frac{r_g(r - r_g)}{2r^2},$$

$$R_{1212} = \frac{R_{1313}}{\sin^2 \theta} = \frac{r_g}{2(r - r_g)}, \quad R_{2323} = -rr_g \sin^2 \theta.$$

Для инвариантов I_1 и I_2 (92,20) находим:

$$I_1 = \left(\frac{r_g}{2r^3} \right)^2, \quad I_2 = -\left(\frac{r_g}{2r^3} \right)^3$$

(произведения с участием дуального тензора R_{iklm} равны нулю тождественно). Тензор кривизны относится к типу D по Петрову (с вещественными инвариантами $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = -r_g/2r^3$). Отметим, что инварианты кривизны имеют особенность лишь в точке $r = 0$, но не при $r = r_g$.

2. Для той же метрики определить пространственную кривизну.

Решение. Компоненты пространственного тензора кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через компоненты тензора $P_{\alpha\beta}$ (и тензор $\gamma_{\alpha\beta}$), так что достаточно вычислить только $P_{\alpha\beta}$ (см. задачу 1 § 92). Тензор $P_{\alpha\beta}$ выражается через $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R_{ik} выражается через g_{ik} . Со значениями $\gamma_{\alpha\beta}$ из (100,15) получим после вычисления:

$$P_\theta^\theta = P_\phi^\phi = \frac{r_g}{2r^3}, \quad P_r^r = -\frac{r_g}{r^3}$$

и $P_\alpha^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Отметим, что $P_\theta^\theta, P_\phi^\phi > 0, P_r^r < 0$, а $P = P_\alpha^\alpha = 0$.

По формуле, полученной в задаче 1 § 92, найдем:

$$P_{r\theta r\theta} = (P_r^r + P_\theta^\theta) \gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta} = -P_\phi^\phi \gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta},$$

$$P_{r\phi r\phi} = -P_\theta^\theta \gamma_{rr} \gamma_{\phi\phi}, \quad P_{\theta\phi\theta\phi} = -P_r^r \gamma_{\theta\theta} \gamma_{\phi\phi}.$$

Отсюда следует (см. примечание на стр. 341), что для «плоскостей», перпендикулярных к радиусам, гауссова кривизна

$$K = \frac{P_{\theta\phi\theta\phi}}{\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\phi\phi}} = -P_r' > 0$$

(это значит, что для небольших треугольников, проведенных на участке «плоскости» вблизи ее пересечения с перпендикулярным к ней радиусом, сумма углов больше чем π). Для «плоскостей» же, проходящих через центр, гауссова кривизна $K < 0$; это значит, что сумма углов, проведенных в «плоскости» небольших треугольников, меньше чем π (подчеркнем, однако, что последнее свойство не относится к треугольникам, охватывающим центр, — сумма углов в таком треугольнике больше чем π).

3. Определить форму поверхности вращения, на которой геометрия была бы такой же, как на проходящей через начало координат «плоскости» в центрально-симметричном гравитационном поле в пустоте.

Решение. Геометрия на поверхности вращения $z = z(r)$ (в цилиндрических координатах) определяется элементом длины

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2(1 + z'^2) + r^2 d\varphi^2.$$

Сравнивая с элементом длины (100,15) в «плоскости» $\theta = \pi/2$

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}},$$

находим:

$$1 + z'^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1},$$

откуда

$$z = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}.$$

При $r = r_g$ эта функция имеет особенность — точку разветвления. Это обстоятельство связано с тем, что пространственная метрика (100,15) в противоположность пространственно-временной метрике (100,14) действительно имеет особенность при $r = r_g$.

Указанные в предыдущей задаче общие свойства геометрии на проходящих через центр «плоскостях» можно найти также и путем рассмотрения кривизны полученной здесь наглядной модели.

4. Преобразовать интервал (100,14) к координатам, в которых пространственная метрика имела бы конформно-евклидов вид (т. е. dl^2 пропорционально своему евклидову выражению).

Решение. Полагая

$$r = \rho \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2,$$

получим из (100,14):

$$ds^2 = \left[\frac{1 - \frac{r_g}{4\rho}}{1 + \frac{r_g}{4\rho}} \right]^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4 (\rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Координаты ρ , θ , φ называют изотропными сферическими координатами; вместо них можно ввести также и изотропные декартовы координаты x , y , z .

В частности, на больших расстояниях ($\rho \gg r_g$) имеем приближенно:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{\rho}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{\rho}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

5. Получить уравнения центрально-симметричного гравитационного поля в веществе в сопутствующей системе отсчета.

Решение. Двумя возможными преобразованиями координат r, t в элементе интервала (100,1) воспользуемся для того, чтобы, во-первых, обратить в нуль коэффициент $a(r, t)$ при dr/dt и, во-вторых, обратить в каждой точке в нуль радиальную скорость вещества (остальные компоненты скорости вообще отсутствуют в силу центральной симметрии). После этого координаты r и t могут еще быть подвергнуты произвольному преобразованию вида $r = r(r'), t = t(t')$.

Обозначим выбранные таким образом радиальную координату и время посредством R и τ , а коэффициенты h, k, l — соответственно $-e^\lambda, -e^\mu, e^\nu$ (λ, μ, ν — функции R и τ). Тогда для элемента интервала имеем:

$$ds^2 = c^2 e^\nu d\tau^2 - e^\lambda dR^2 - e^\mu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1)$$

Компоненты тензора энергии-импульса равны в сопутствующей системе отсчета:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\rho.$$

Вычисление приводит к следующим уравнениям поля¹⁾:

$$-\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4} \rho = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\nu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - e^{-\mu}, \quad (2)$$

$$-\frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} \rho = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu' \lambda' - \nu' \lambda' + \mu' \nu') + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\dot{\lambda} \dot{\nu} + \dot{\mu} \dot{\nu} - \dot{\lambda} \dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \quad (3)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = -e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu' \lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} \dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) + e^{-\mu}, \quad (4)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 = 0 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (2\mu' + \dot{\mu} \mu' - \dot{\lambda} \mu' - \nu' \dot{\mu}) \quad (5)$$

(штрих означает дифференцирование по R , а точка — по τ).

Некоторые общие соотношения для λ, μ, ν могут быть легко найдены, если исходить из содержащихся в уравнениях поля уравнений $T_{ik}^k = 0$. Воспользовавшись формулой (86,11), получим следующие два уравнения:

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{\varepsilon}}{\rho + \varepsilon}, \quad \nu' = -\frac{2\rho'}{\rho + \varepsilon}. \quad (6)$$

¹⁾ Компоненты R_{ik} можно вычислять непосредственно как это делалось в тексте, или же по формулам, полученным в задаче 2 § 92.

Если ρ известно как функция v , то уравнения (6) интегрируются в виде

$$\lambda + 2\mu = -2 \int \frac{dv}{\rho + v} + f_1(R), \quad v = -2 \int \frac{d\rho}{\rho + v} + f_2(\tau), \quad (7)$$

где функции $f_1(R)$ и $f_2(\tau)$ могут быть выбраны произвольным образом ввиду указанной выше возможности произвольных преобразований вида $R = R(R')$, $\tau = \tau(\tau')$.

6. Найти уравнения, определяющие статическое гравитационное поле в пустоте вокруг неподвижного аксиально-симметричного тела (H. Weyl, 1917).

Решение. Статический элемент интервала в цилиндрических пространственных координатах $x^1 = \varphi$, $x^2 = \rho$, $x^3 = z$ ищем в виде

$$ds^2 = e^v c^2 dt^2 - e^\omega d\varphi^2 - e^\mu (d\rho^2 + dz^2),$$

где v , ω , μ — функции ρ и z ; такое представление фиксирует выбор координат с точностью до преобразования $\rho = \rho(\rho', z')$, $z = z(\rho', z')$, умножающего квадратичную форму $d\rho^2 + dz^2$ лишь на общий множитель.

Из уравнений

$$R_0^0 = \frac{1}{4} e^{-\mu} [2v_{,\rho,\rho} + v_{,\rho}(v_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2v_{,z,z} + v_{,z}(v_{,z} + \omega_{,z})] = 0,$$

$$R_1^1 = \frac{1}{4} e^{-\mu} [2\omega_{,\rho,\rho} + \omega_{,\rho}(v_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2\omega_{,z,z} + \omega_{,z}(v_{,z} + \omega_{,z})] = 0$$

(где индексы $,\rho$ и $,z$ означают дифференцирование по ρ и z), взяв их сумму, находим:

$$\rho'_{,\rho,\rho} + \rho'_{,z,z} = 0,$$

где обозначено

$$\rho'(\rho, z) = e^{\frac{v+\omega}{2}}.$$

Таким образом, $\rho'(\rho, z)$ — гармоническая функция переменных ρ , z . Согласно известным свойствам таких функций это значит, что существует сопряженная гармоническая функция $z'(\rho, z)$ такая, что $\rho' + iz' = f(\rho + iz)$, где f — аналитическая функция комплексной переменной $\rho + iz$. Если теперь выбрать ρ' , z' в качестве новых координат, то в силу конформности преобразования $\rho, z \rightarrow \rho', z'$ будет

$$e^\mu (d\rho^2 + dz^2) = e^{\mu'} (d\rho'^2 + dz'^2),$$

где $\mu'(\rho', z')$ — некоторая новая функция. В то же время $e^\omega = \rho'^2 e^{-v}$; обозначив $\omega + v = \gamma$ и опустив далее все штрихи, напишем ds^2 в виде

$$ds^2 = e^v c^2 dt^2 - \rho^2 e^{-\gamma} d\varphi^2 - e^{\gamma-\nu} (d\rho^2 + dz^2). \quad (1)$$

Составив для этой метрики уравнения $R_0^0 = 0$, $R_3^3 - R_2^2 = 0$, $R_2^3 = 0$, найдем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Отметим, что (2) имеет вид уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (для функции, не зависящей от φ). Если это уравнение решено, то функция $v(\rho, z)$ целиком определяется уравнениями (2—3). Вдали от создающего поле тела функции v и γ должны стремиться к нулю.