§ 101. Движение в центрально-симметричном гравитационном поле

Рассмотрим движение частицы в центрально-симметричном гравитационном поле. Как и во всяком центральном поле, движение будет происходить в одной «плоскости», проходящей через центр поля; выберем эту плоскость в качестве плоскости $\theta = \pi/2$.

Для определения траектории частицы воспользуемся уравнением Гамильтона — Якоби

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0,$$

где m — масса частицы (массу же центрального тела обозначим здесь как m'). С метрическим тензором из (100,14) это уравнение принимает вид

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2c^2 = 0, \tag{101,1}$$

где $r_g = 2m'k/c^2$ — гравитационный радиус центрального тела.

По общим правилам решения уравнения Гамильтона — Якоби ищем S в виде

$$S = -\mathscr{E}_0 t + M\varphi + S_r(r) \tag{101,2}$$

с постоянными энергией $\mathscr{E}_0$ и моментом импульса M. Подставив (101,2) в (101,1), найдем производную dS_r/dr и затем:

$$S_r = \int\left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2} dr. \tag{101,3}$$

Зависимость $r = r(t)$ дается, как известно (см. I § 47), уравнением $\partial S/\partial\mathscr{E}_0 = \text{const}$, откуда

$$ct = \frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\int\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left[\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}. \tag{101,4}$$

Траектория же определяется уравнением $\partial S/\partial M = \text{const}$, откуда

$$\varphi = \int\frac{M}{r^2}\left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{-1/2} dr. \tag{101,5}$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому.

Для движения планет в поле тяготения Солнца релятивистская теория приводит лишь к незначительным поправкам по сравнению с теорией Ньютона, поскольку скорости планет очень малы по сравнению со скоростью света. В уравнении траектории

(101,5) этому соответствует малость отношения r_g/r, где r_g — гравитационный радиус Солнца [1]).

Для вычисления релятивистских поправок к траектории удобно исходить из выражения (101,3) радиальной части действия до его дифференцирования по M. Заменим переменную интегрирования согласно $r(r-r_g)=r'^2$, т. е. $r-r_g/2\approx r'$, в результате чего член с M^2 под корнем примет вид M^2/r'^2. В остальных же членах производим разложение по степеням r_g/r' и получаем с требуемой точностью:

$$S_r=\int\left[\left(2\mathscr{E}'m+\frac{\mathscr{E}'^2}{c^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}(2m^2m'k+4\mathscr{E}'mr_g)-\frac{1}{r^2}\left(M^2-\frac{3m^2c^2r_g^2}{2}\right)\right]^{1/2}dr, \qquad (101,6)$$

где мы для краткости опустили штрих у r' и ввели нерелятивистскую энергию $\mathscr{E}'$ (без энергии покоя).

Поправочные члены в коэффициентах в первых двух членах под корнем отражаются только на не представляющем особого интереса изменении связи между энергией и моментом частицы и параметрами ее ньютоновской орбиты (эллипса). Изменение же коэффициента при $1/r^2$ приводит к более существенному эффекту — к систематическому (*вековому*) смещению перигелия орбиты.

Поскольку траектория определяется уравнением $\varphi+\frac{\partial S_r}{\partial M}=$ $=\text{const}$, то изменение угла φ за время одного оборота планеты по орбите есть

$$\Delta\varphi=-\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r,$$

где ΔS_r — соответствующее изменение S_r. Разлагая S_r по степеням малой поправки в коэффициент при $1/r^2$, получим:

$$\Delta S_r=\Delta S_r^{(0)}-\frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}\frac{\partial\Delta S_r^{(0)}}{\partial M},$$

где $\Delta S_r^{(0)}$ соответствует движению по несмещающемуся замкнутому эллипсу. Дифференцируя это соотношение по M и учитывая, что

$$-\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r^{(0)}=\Delta\varphi^{(0)}=2\pi,$$

найдем:

$$\Delta\varphi=2\pi+\frac{3\pi m^2c^2r_g^2}{2M^2}=2\pi+\frac{6\pi k^2m^2m'^2}{c^2M^2}.$$

Второй член и представляет собой искомое угловое перемещение $\delta\varphi$ ньютоновского эллипса за время одного оборота, т. е. смеще-

[1]) Для Солнца $r_g=3$ км; для Земли $r_g=0{,}9$ см.

ние перигелия орбиты. Выражая его через длину большой полуоси a и эксцентриситет эллипса e с помощью известной формулы $M^2/km'm^2 = a(1-e^2)$, получим [1]):

$$\delta\varphi = \frac{6\pi km'}{c^2 a(1-e^2)}. \tag{101,7}$$

Далее рассмотрим путь светового луча в центрально-симметричном гравитационном поле. Этот путь определяется уравнением эйконала (87,9)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

отличающимся от уравнения Гамильтона — Якоби только тем, что в последнем надо положить $m = 0$. Поэтому траекторию луча можно получить непосредственно из формулы (101,5), положив в ней $m = 0$; при этом вместо энергии частицы $\mathscr{E}_0 = -\partial S/\partial t$ надо писать частоту света $\omega_0 = -\partial\psi/\partial t$. Введя также вместо постоянной M постоянную ρ согласно $\rho = cM/\omega_0$, получим:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \tag{101,8}$$

При пренебрежении релятивистскими поправками ($r_g \to 0$) это уравнение дает $r = \rho/\cos\varphi$, т. е. прямую, проходящую на расстоянии ρ от начала координат. Для исследования же релятивистских поправок поступим аналогично тому, как было сделано в предыдущем случае.

Для радиальной части эйконала имеем (ср. (101,3)):

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r(r-r_g)}}\,dr.$$

Производя такие же преобразования, которые служили для перехода от (101,3) к (101,6), получим:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}\,dr.$$

Разлагая теперь подынтегральное выражение по степеням r_g/r, имеем:

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\operatorname{Arch}\frac{r}{\rho},$$

где $\psi_r^{(0)}$ отвечает классическому прямолинейному лучу.

Полное изменение ψ_r при распространении луча от некоторого очень большого расстояния R до ближайшей к центру

[1]) Численные значения смещения, определяемого формулой (101,7), для Меркурия и Земли равны соответственно 43,0″ и 3,8″ в сто лет.

точки $r=\rho$ и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta\psi_r=\Delta\psi_r^{(0)}+2\frac{r_g\omega_0}{c}\operatorname{Arch}\frac{R}{\rho}.$$

Соответствующее же изменение полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M=\rho\omega_0/c$:

$$\Delta\varphi=-\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M}=-\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M}+\frac{2r_gR}{\rho\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

Наконец, переходя к пределу $R\to\infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует $\Delta\varphi=\pi$, получим:

$$\Delta\varphi=\pi+\frac{2r_g}{\rho}.$$

Это значит, что под влиянием поля тяготения световой луч искривляется: его траектория представляет собой кривую, обращенную вогнутостью к центру (луч «притягивается» к центру), так что угол между ее двумя асимптотами отличается от π на

$$\delta\varphi=\frac{2r_g}{\rho}=\frac{4km'}{c^2\rho}; \qquad (101,9)$$

другими словами, луч света, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\delta\varphi$ [1]).

§ 102. Гравитационный коллапс сферического тела

В шварцшильдовой метрике (100,14) g_{00} обращается в нуль, а g_{11} — в бесконечность при $r=r_g$ (на *шварцшильдовой сфере*). Это обстоятельство могло бы дать основания к заключению о наличии особенности пространственно-временной метрики и затем к заключению о невозможности существования тел с «радиусом» (при заданной массе), меньшим гравитационного радиуса. В действительности, однако, такие заключения были бы неправильными. На это указывает уже то обстоятельство, что определитель $g=-r^4\sin^2\theta$ никакой особенности при $r=r_g$ не имеет, так что условие $g<0$ (82,3) не нарушается. Мы увидим, что фактически мы имеем дело лишь с невозможностью осуществления при $r<r_g$ жесткой системы отсчета.

Для выяснения истинного характера пространственно-временной метрики в этой области произведем преобразование координат вида [2])

$$c\tau=\pm ct\pm\int\frac{f(r)\,dr}{1-\frac{r_g}{r}},\qquad R=ct+\int\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)f(r)}. \qquad (102,1)$$

---

[1]) Для луча, проходящего мимо края Солнца, $\delta\varphi=1{,}75''$.

[2]) Физический смысл шварцшильдовой особенности был впервые выяснен *Финкельштейном* (*D. Finkelstein*, 1958) с помощью другого преобразования. Метрика (102,3) была ранее найдена *Леметром* (*G. Lemaître*, 1938).