

точки $r = \rho$ и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2 \frac{r_g \omega_0}{c} \operatorname{Arch} \frac{R}{\rho}.$$

Соответствующее же изменение полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M = \rho\omega_0/c$:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_g R}{\rho\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Наконец, переходя к пределу $R \rightarrow \infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует $\Delta\varphi = \pi$, получим:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}.$$

Это значит, что под влиянием поля тяготения световой луч искривляется: его траектория представляет собой кривую, обращенную вогнутостью к центру (луч «притягивается» к центру), так что угол между ее двумя асимптотами отличается от π на

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho}; \quad (101,9)$$

другими словами, луч света, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\delta\varphi^1$.

§ 102. Гравитационный коллапс сферического тела

В шварцшильдовой метрике (100,14) g_{00} обращается в нуль, а g_{11} — в бесконечность при $r = r_g$ (на шварцшильдовой сфере). Это обстоятельство могло бы дать основания к заключению о наличии особенности пространственно-временной метрики и затем к заключению о невозможности существования тел с «радиусом» (при заданной массе), меньшим гравитационного радиуса. В действительности, однако, такие заключения были бы неправильными. На это указывает уже то обстоятельство, что определитель $g = -r^4 \sin^2 \theta$ никакой особенности при $r = r_g$ не имеет, так что условие $g < 0$ (82,3) не нарушается. Мы увидим, что фактически мы имеем дело лишь с невозможностью осуществления при $r < r_g$ жесткой системы отсчета.

Для выяснения истинного характера пространственно-временной метрики в этой области произведем преобразование координат вида²)

$$ct = \pm ct \pm \int \frac{f(r) dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)f(r)}. \quad (102,1)$$

¹⁾ Для луча, проходящего мимо края Солнца, $\delta\varphi = 1,75^\circ$.

²⁾ Физический смысл шварцшильдовой особенности был впервые выяснен Финкельштейном (D. Finkelstein, 1958) с помощью другого преобразования. Метрика (102,3) была ранее найдена Леметром (G. Lemaître, 1938).

Тогда

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2} (c^2 d\tau^2 - f^2 dR^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Мы устраним особенность при $r = r_g$, выбрав $f(r)$ так, чтобы было $f(r_g) = 1$. Если положить $f(r) = \sqrt{r_g/r}$, то новая система координат будет также и синхронной ($g_{\tau\tau} = 1$). Выбрав сначала для определенности верхние знаки в (102,1), будем иметь:

$$R - c\tau = \int \frac{(1 - f^2) dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)f} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}} dr = \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}},$$

или

$$r = \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{2/3} r_g^{1/3} \quad (102,2)$$

(постоянную интегрирования, зависящую от начала отсчета времени τ , полагаем равной нулю). Элемент интервала:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{2/3} r_g^{1/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (102,3)$$

В этих координатах особенность на шварцшильдовой сфере (которой соответствует здесь равенство $\frac{3}{2}(R - c\tau) = r_g$) отсутствует. Координата R является везде пространственной, а τ — временной. Метрика (102,3) нестационарна. Как во всякой синхронной системе отсчета, линии времени в ней являются геодезическими линиями. Другими словами, покоящиеся относительно системы отсчета «пробные» частицы — это частицы, свободно движущиеся в данном поле.

Заданным значениям r отвечают мировые линии $R - c\tau = \text{const}$ (наклонные прямые линии на диаграмме рис. 20). Мировые же линии частиц, покоящихся относительно системы отсчета, на этой диаграмме изображаются вертикальными прямыми; передвигаясь вдоль них, частицы за конечный интервал собственного времени «падают» в центр поля ($r = 0$), представляющий собой точку истинной особенности метрики.

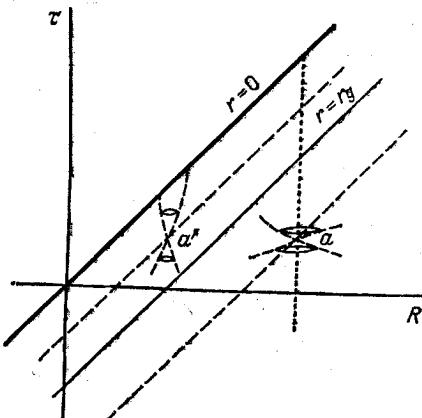


Рис. 20

Рассмотрим распространение радиальных световых сигналов. Уравнение $ds^2 = 0$ (при $\theta, \varphi = \text{const}$) дает для производной $d\tau/dR$ вдоль луча:

$$c \frac{d\tau}{dR} = \pm \left[\frac{3}{2r_g} (R - c\tau) \right]^{-1/2} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad (102,4)$$

два знака отвечают двум границам светового «конуса» с вершиной в заданной мировой точке. При $r > r_g$ (точка a на рис. 20) наклон этих границ $|cd\tau/dR| < 1$, так что прямая $r = \text{const}$ (вдоль которой $cd\tau/dR = 1$) попадает внутрь конуса. В области же $r < r_g$ (точка a') имеем $|cd\tau/dR| > 1$, так что прямая $r = \text{const}$ — мировая линия неподвижной (относительно центра поля) частицы — лежит вне конуса. Обе границы конуса на конечном расстоянии пересекают линию $r = 0$, подходя к ней вертикально. Поскольку никакие причинно связанные события не могут лежать на мировой линии вне светового конуса, отсюда следует, что в области $r < r_g$ никакие частицы не могут быть неподвижными. Все вообще взаимодействия и сигналы распространяются здесь по направлению к центру, достигая его за конечный промежуток времени τ .

Аналогичным образом, выбрав в преобразовании (102,1) нижние знаки, мы получили бы «расширяющуюся» систему отсчета с метрикой, отличающейся от (102,3) изменением знака перед τ . Она отвечает пространству-времени, в котором (в области $r < r_g$) по-прежнему невозможен покой, но распространение всех сигналов происходит в направлении от центра.

Изложенные результаты можно применить к вопросу о поведении массивных тел в общей теории относительности.

Исследование релятивистских условий равновесия сферического тела показывает, что для тела достаточно большой массы равновесного статического состояния может не существовать (см. «Статистическая физика», ч. 1, § 109). Очевидно, что такое тело должно неограниченно сжиматься (так называемый гравитационный коллапс)¹⁾.

В не связанный с телом галилеевой на бесконечности системе отсчета (метрика (100,14)) радиус центрального тела не может быть меньше r_g . Это значит, что по часам t удаленного наблюдателя радиус сжимающегося тела лишь асимптотически при $t \rightarrow \infty$ стремится к гравитационному радиусу. Легко выяснить предельный закон этого приближения.

Частица на поверхности сжимающегося тела находится все время в поле тяготения постоянной массы m — полной массы тела. При $r \rightarrow r_g$ силы тяготения становятся очень большими; плотность же тела (а с нею и давление) остается конечной. Пренебрегая на этом основании силами давления, мы сведем опре-

¹⁾ Основные свойства этого явления были впервые выяснены Оппенгеймером и Снейдером (J. R. Oppenheimer, H. Snyder, 1939).

деление зависимости радиуса тела от времени к рассмотрению свободного падения пробной частицы в поле массы m .

Зависимость $r(t)$ для падения в шварцшильдовом поле дается интегралом (101,4), причем для чисто радиального движения момент $M = 0$. Так, если падение начинается на «расстоянии» r_0 от центра с нулевой скоростью в некоторый момент времени t_0 , то энергия частицы $\mathcal{E}_0 = mc^2\sqrt{1 - r_g/r_0}$ и для времени t достижения ею «расстояния» r имеем:

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}}. \quad (102,5)$$

Этот интеграл расходится при $r \rightarrow r_g$ как $-r_g \ln(r - r_g)$. Отсюда асимптотический закон приближения r к r_g :

$$r - r_g = \text{const } e^{-ct/r_g}. \quad (102,6)$$

Таким образом, конечная стадия приближения коллапсирующего тела к гравитационному радиусу происходит по экспоненциальному закону с очень малым характерным временем $\sim r_g/c$.

Хотя скорость наблюдаемого извне скатия асимптотически стремится к нулю, скорость v падающих частиц, измеренная в их собственном времени, напротив, возрастает, стремясь к скорости света. Действительно, согласно определению (88,10):

$$v^2 = \left(\frac{\sqrt{-g_{11}} dr}{\sqrt{g_{00}} dt} \right)^2.$$

Взяв g_{11} и g_{00} из (100,14), а dr/dt из (102,5), найдем:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0}. \quad (102,7)$$

Приближение к гравитационному радиусу, требующее бесконечного времени по часам удаленного наблюдателя, занимает лишь конечный интервал собственного времени (время в сопутствующей системе отсчета). Это ясно уже из изложенного выше общего анализа, но в этом можно убедиться и непосредственным вычислением собственного времени τ как инвариантного интеграла

$$c\tau = \int ds = \int \left[c^2 g_{00} \frac{dt^2}{dr^2} + g_{11} \right]^{1/2} dr.$$

Взяв dr/dt из (102,5), находим для собственного времени падения из точки r_0 в r :

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)^{-1/2} dr. \quad (102,8)$$

Этот интеграл сходится при $r \rightarrow r_g$.

Достигнув (по собственному времени) гравитационного радиуса, тело будет продолжать сжиматься, причем все его частицы достигнут центра за конечное собственное время; момент падения каждой порции вещества в центр представляет собой истинную особенность пространственно-временной метрики. Весь процесс сжатия тела под шварцшильдовой сферой, однако, не наблюдаем из внешней системы отсчета. Моменту прохождения поверхностью тела этой сферы отвечает время $t = \infty$; можно сказать, что весь процесс коллапса под шварцшильдовой сферой происходит как бы «за временной бесконечностью» удаленного наблюдателя — крайний пример относительности хода времени. Никаких логических противоречий в этой картине, разумеется, нет. В полном соответствии с ней находится указанное выше свойство сжимающейся системы отсчета: в этой системе из-под шварцшильдовой сферы не выходят никакие сигналы. Частицы или лучи света могут пересекать эту сферу (в сопутствующей системе отсчета) лишь в одном направлении — внутрь, и, раз пройдя туда, уже никогда обратно выйти не могут. Такую поверхность «одностороннего клапана» называют *горизонтом событий*.

По отношению ко внешнему наблюдателю сжатие к гравитационному радиусу сопровождается «самозамыканием» тела. Время распространения посылаемых с тела сигналов стремится к бесконечности. Действительно, для световых сигналов $ds^2 = 0$ и в шварцшильдовой системе имеем $c dt = dr/(1 - r_g/r)$; время распространения от r до некоторого $r_0 > r$ дается интегралом

$$c \Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - r_g/r} = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \quad (102,9)$$

расходящимся (как и интеграл (102,5)) при $r \rightarrow r_g$.

Интервалы собственного времени на поверхности тела сокращены по отношению к интервалам времени t бесконечно удаленного наблюдателя в отношении

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}};$$

при $r \rightarrow r_g$, следовательно, все процессы на теле по отношению ко внешнему наблюдателю «застыгают». Частота спектральной линии, испускаемой на теле и воспринимаемой удаленным наблюдателем, уменьшается, однако не только этим эффектом гравитационного красного смещения, но и эффектом Доплера от движения источника, падающего к центру вместе с поверхностью шара. Когда радиус шара уже близок к r_g (так что скорость падения уже близка к скорости света), этот эффект уменьшает частоту в

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} / \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

раз. Под влиянием обоих эффектов наблюдаемая частота обращается, следовательно, в нуль при $r \rightarrow r_g$ по закону

$$\omega = \text{const} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right). \quad (102,10)$$

Таким образом, с точки зрения удаленного наблюдателя гравитационный коллапс приводит к возникновению «застывшего» тела, которое не посылает в окружающее пространство никаких сигналов и взаимодействует с внешним миром только своим статическим гравитационным полем. Такое образование называют *черной дырой* или *коллапсаром*.

В заключение сделаем еще одно замечание методического характера. Мы видели, что для центрального поля в пустоте инерциальная на бесконечности «система внешнего наблюдателя» не полна: в ней нет места для мировых линий частиц, движущихся внутри шварцшильдовой сферы. Метрика же (102,3) применима также и внутри шварцшильдовой сферы, однако и эта система отсчета в известном смысле не полна. Действительно, рассмотрим в этой системе частицу, совершающую радиальное движение по направлению от центра. Ее мировая линия при $t \rightarrow \infty$ уходит в бесконечность, а при $t \rightarrow -\infty$ она должна асимптотически приближаться к $r = r_g$, поскольку в данной метрике внутри шварцшильдовой сферы движение может происходить лишь по направлению к центру. С другой стороны, продвижение частицы от $r = r_g$ до любой заданной точки $r > r_g$ происходит за конечный промежуток собственного времени. По собственному времени, следовательно, частица должна подойти к шварцшильдовой сфере изнутри прежде, чем начать двигаться вне ее; но эта часть истории частицы не охватывается данной системой отсчета¹⁾.

Подчеркнем, однако, что эта неполнота возникает только при формальном рассмотрении метрики поля, как создаваемого точечной массой. В реальной физической задаче, скажем, о коллапсе протяженного тела, неполнота не проявляется: решение, получающееся путем сшивания метрики (102,3) с решением внутри вещества, будет, разумеется, полным и будет описывать всю историю всех возможных движений частиц (мировые линии частиц, движущихся в области $r > r_g$ по направлению от центра, при этом непременно начинаются от поверхности шара еще до его сжатия под сферу Шварцшильда).

Задачи

- Для частицы в поле коллапсара найти радиусы круговых орбит (C. A. Каплан, 1949).

¹⁾ Построение системы отсчета, свободной от такой неполноты, будет рассмотрено в конце следующего параграфа.

Решение. Зависимость $r(t)$ для частицы, движущейся в шварцшильдовом поле, дается формулой (101,4) или, в дифференциальном виде:

$$\frac{1}{1 - r_g/r} \frac{dr}{c dt} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} [\mathcal{E}_0^2 - U^2(r)]^{1/2}, \quad (1)$$

где

$$U(r) = mc^2 \left[\left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(1 + \frac{M^2}{m^2 c^2 r^2} \right) \right]^{1/2}$$

(m — масса частицы, $r_g = 2km'/c^2$ — гравитационный радиус центрального тела с массой m'). Функция $U(r)$ играет роль «эффективной потенциальной энергии» в том смысле, что условием $\mathcal{E}_0 \geq U(r)$ определяются (аналогично

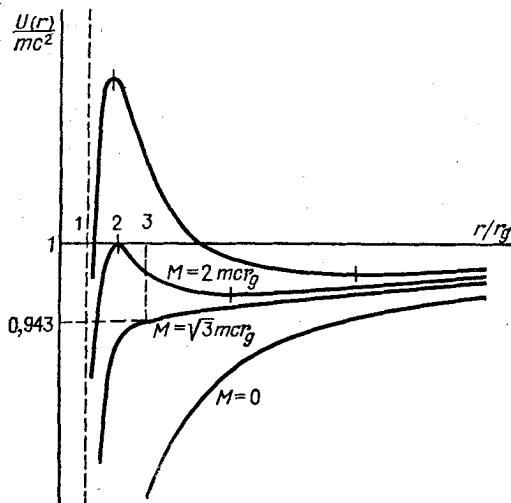


Рис. 21

нерелятивистской теории) допустимые области движения. На рис. 21 изображены кривые $U(r)$ для различных значений момента M .

Радиусы круговых орбит и соответствующие им значения \mathcal{E}_0 и M определяются экстремумами функции $U(r)$, причем минимумы отвечают устойчивым, а максимумы — неустойчивым орбитам. Совместное решение уравнений $U(r) = \mathcal{E}_0$, $U'(r) = 0$ дает:

$$\frac{r}{r_g} = \frac{M^2}{m^2 c^2 r_g^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3m^2 c^2 r_g^2}{M^2}} \right],$$

$$\mathcal{E}_0 = Mc \sqrt{\frac{2}{rr_g}} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right),$$

причем верхний знак относится к устойчивым, а нижний — к неустойчивым орбитам. Ближайшая к центру устойчивая круговая орбита имеет параметры

$$r = 3r_g, \quad M = \sqrt{3} mcr_g, \quad \mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{8}{9}} mc^2.$$

Минимальный радиус неустойчивой орбиты равен $3r_g/2$ и достигается в пределе $M \rightarrow \infty$, $\mathcal{E}_0 \rightarrow \infty$. На рис. 22 изображена кривая зависимости r/r_g

от M/mcr_g ; ее верхняя ветвь дает радиусы устойчивых, а нижняя — неустойчивых орбит¹⁾.

2. Для движения в том же поле определить сечение гравитационного захвата падающих на бесконечности: а) нерелятивистских, б) ультраполятистических частиц (Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, 1964).

Решение. а) Для нерелятивистской (на бесконечности) скорости v_∞ энергия частицы $\mathcal{E}_0 \approx mc^2$. Из кривых рис. 21 видно, что прямая $\mathcal{E}_0 = mc^2$

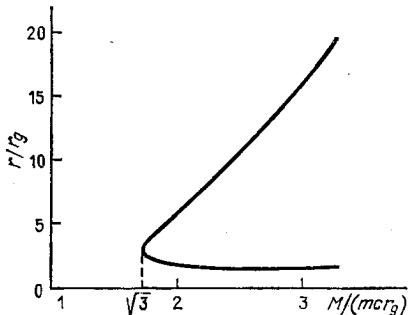


Рис. 22

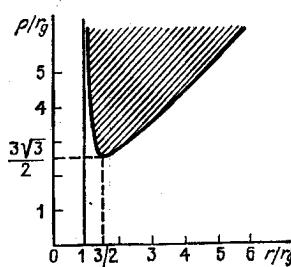


Рис. 23

лежит выше всех потенциальных кривых с моментами $M < 2mcrg$, т. е. с прицельными расстояниями $\rho < 2cr_g/v_\infty$. Все частицы с такими ρ гравитационно захватываются: они достигают (асимптотически, при $t \rightarrow \infty$) шварцшильдовой сферы, не уходя снова на бесконечность. Сечение захвата:

$$\sigma = 4\pi r_g^2 \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2.$$

б) В уравнении (1) задачи 1 переход к ультраполятистической частице (или к лучу света) осуществляется заменой $m \rightarrow 0$. Введя также прицельное расстояние $\rho = cM/\mathcal{E}_0$, получим:

$$\frac{1}{1 - r_g/r} \frac{dr}{c dt} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho^2 r_g}{r^3}}.$$

Границы движения по r (точки поворота) определяются нулями подкоренного выражения. Как функция от ρ они изображаются кривой на рис. 23; возможным движениям отвечает незаштрихованная часть плоскости. Кривая имеет минимум в точке

$$\rho = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g, \quad r = \frac{3}{2} r_g.$$

При меньших значениях прицельного расстояния частица не встречает точки поворота, т. е. проходит к шварцшильдовой сфере. Отсюда сечение захвата

$$\sigma = \frac{27}{4} \pi r_g^2.$$

1) Напомним для сравнения, что в ньютонаовском поле круговые орбиты были бы возможны (и устойчивы) на любом расстоянии от центра (радиус связан с моментом согласно $r = M^2/km'm^2$).